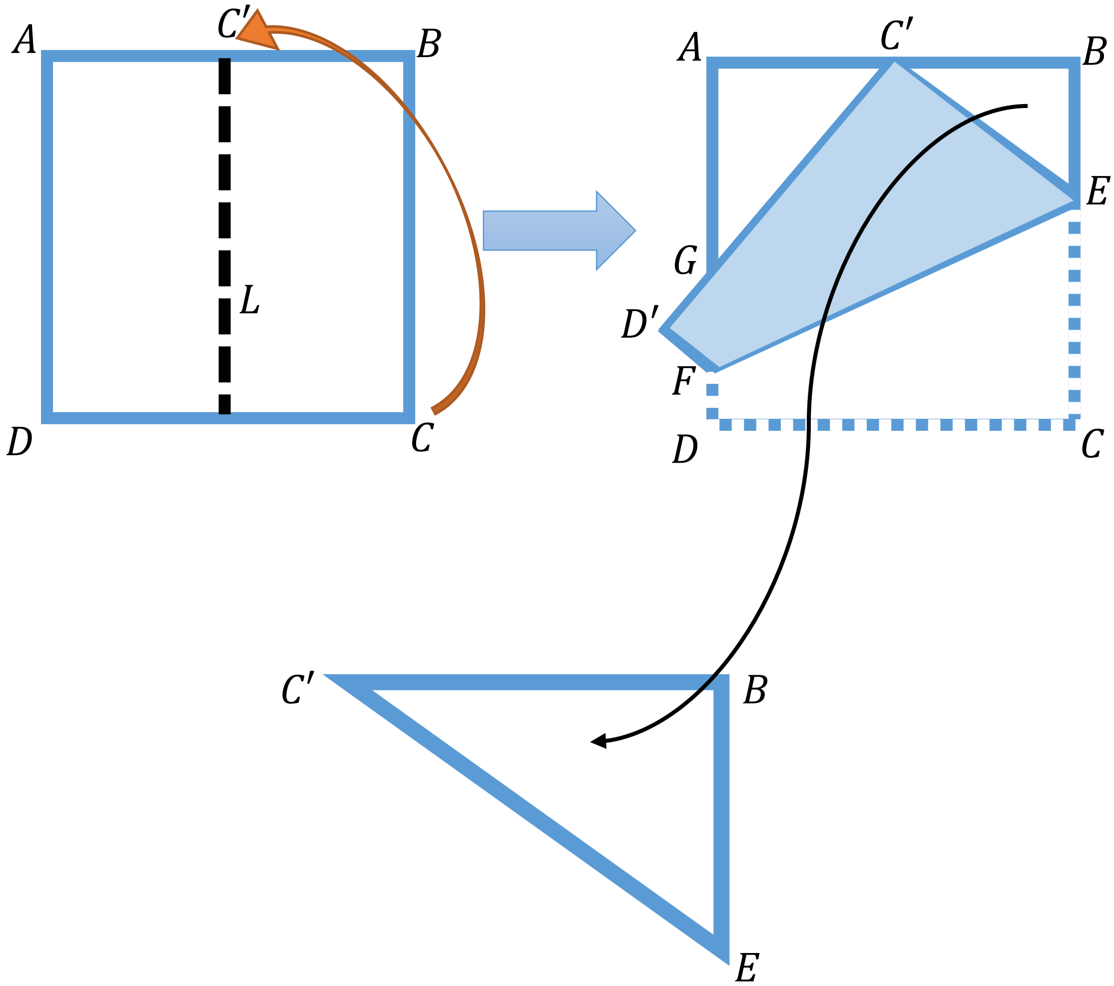
<table>
<tr><td colspan="5">Mathematics Project Competition (2024/25)
數學專題習作比賽 (2024/25)
Information Sheet 資料頁</td></tr>
<tr><td>Category
參賽組別</td><td colspan="4">☑* A 組：初中習作 (Category A: Junior secondary project)
☐* B 組：中一小型習作 (Category B: S1 mini-project)</td></tr>
<tr><td>Title of Project
專題習作題目</td><td colspan="4">芳賀定理中畢氏三元數的延伸探究</td></tr>
<tr><td>Name of School</td><td colspan="4">Wong Shiu Chi Secondary School</td></tr>
<tr><td>學校名稱</td><td colspan="4">王肇枝中學</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Teacher supervisor
負責教師</td><td colspan="2">Name in English</td><td colspan="2">中文姓名</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mr Chau Chun Sing</td><td colspan="2">周鎮聲先生</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Team members
隊員</td><td colspan="2">Name in English</td><td>中文姓名</td><td>Class 班別</td></tr>
<tr><td>1</td><td>LIU YINUO</td><td>劉一諾</td><td>2A</td></tr>
<tr><td>2</td><td>YIP TSZ HIM</td><td>葉梓謙</td><td>2A</td></tr>
<tr><td>3</td><td>LIU CHUN HO</td><td>劉鎮豪</td><td>2D</td></tr>
<tr><td>4</td><td>ZHENG HAO XUAN</td><td>鄭皓軒</td><td>2D</td></tr>
<tr><td>5</td><td>ZHOU CHUN SHING</td><td>周俊成</td><td>2D</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

芳賀定理中畢氏三元數的延伸探究



$BE: C'B: C'E = ?:?:?$

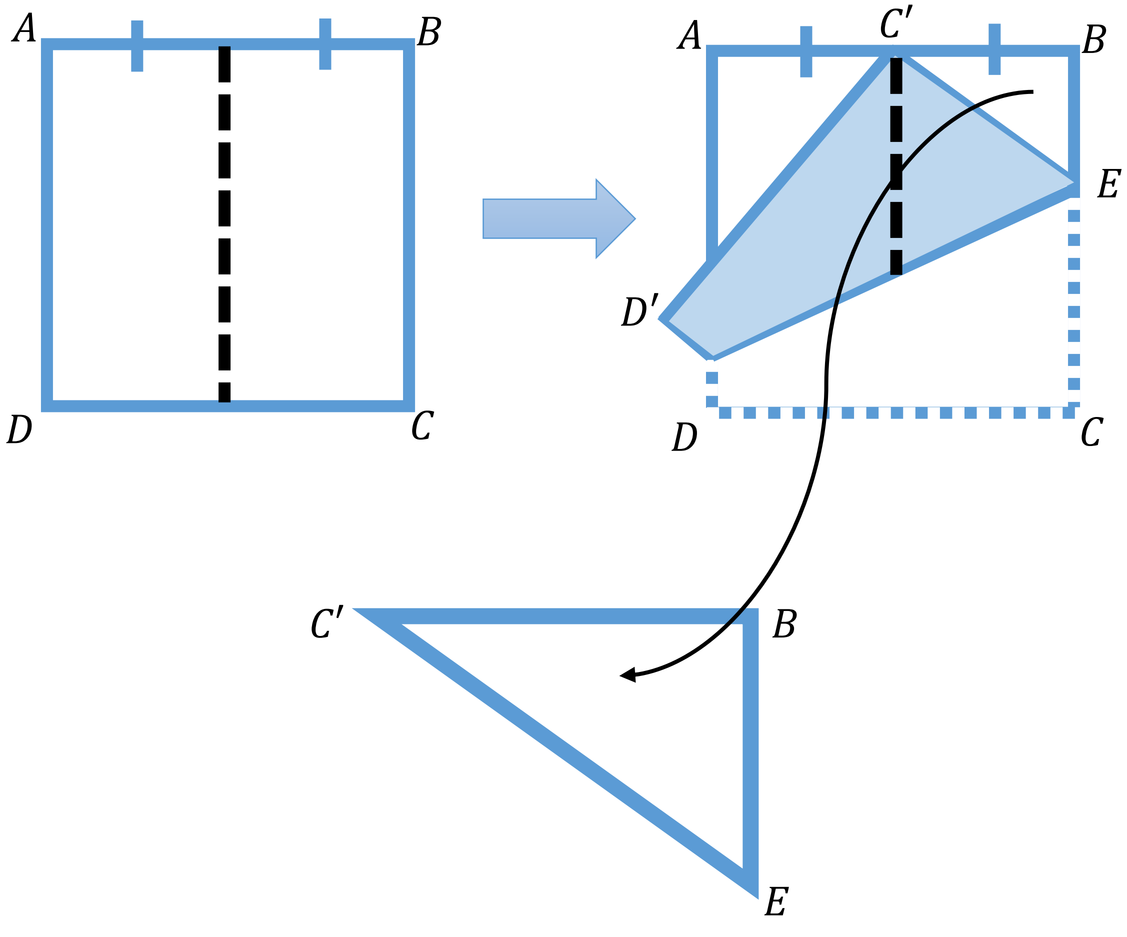
目錄

簡介

在芳賀第一定理中，我們看到所形成的三角形三邊比例會是畢氏三元數。在此探究中，我們延續相關摺紙方式，即按特定邊長比例摺一下紙，找出當中畢氏三元數的延伸關係。

研究背景及目的

在研習開始時，我們在網絡上看到一個神奇又簡單的數學摺紙理論—「芳賀第一定理」，就是簡單在一張正方形紙沿邊平行作對摺，再由一角摺向該摺痕的末端，便能摺出三邊比例為 3:4:5 的畢氏三角形。我們這研習報告的目的，是想研究在甚麼情況下，會得出哪些結果，並從中找出與數列的一些關係。



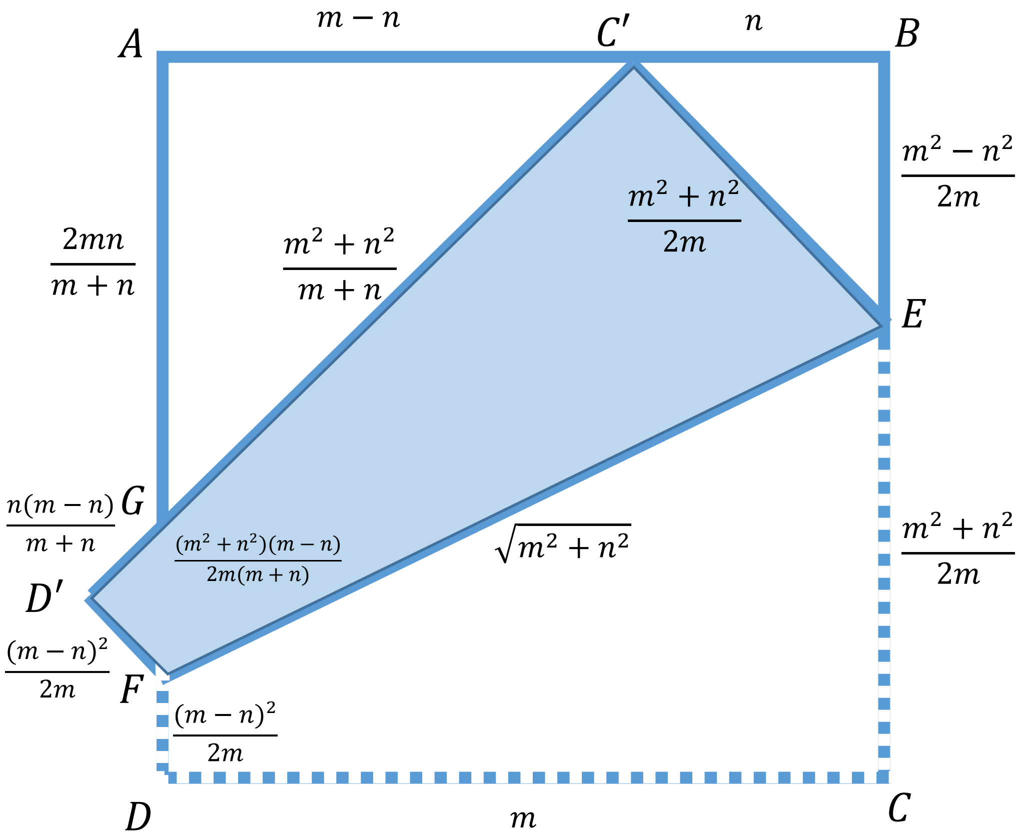
$BE:C'B:C'E=3:4:5$

第五章：總結

一張正方形紙，不需任何量度儀器，只要根據本研究的邊長比例找出所需摺痕，把正方形紙的一角摺到對邊上，便能得出特定邊長比例為畢氏三元數的三角形，而當中找直角鄰邊長度互質比例相差一致(例如相差 1)的畢氏三角形比例，更可用本研習所發現的規律一一摺出。以下是本研習每一章的重點：

第一章重點

在正方形紙$ABCD$上，假設AB邊長為m，由紙的一角C摺到AB上的一點C'，而$C'B$的長度是n，相關摺疊後的各邊邊長如下：

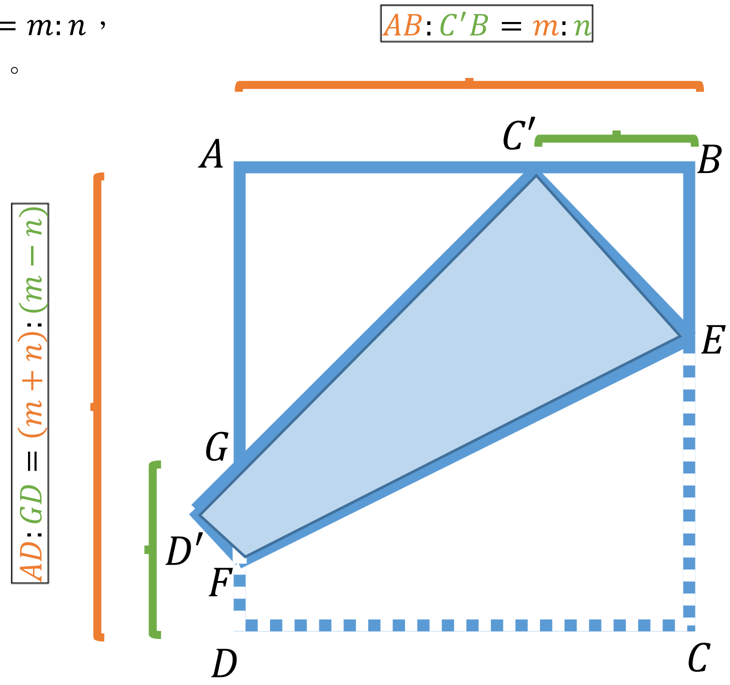


從而可知當$AB = AD = m$及$C'B = n$時，可得$GD = \frac{m(m-n)}{m+n}$。

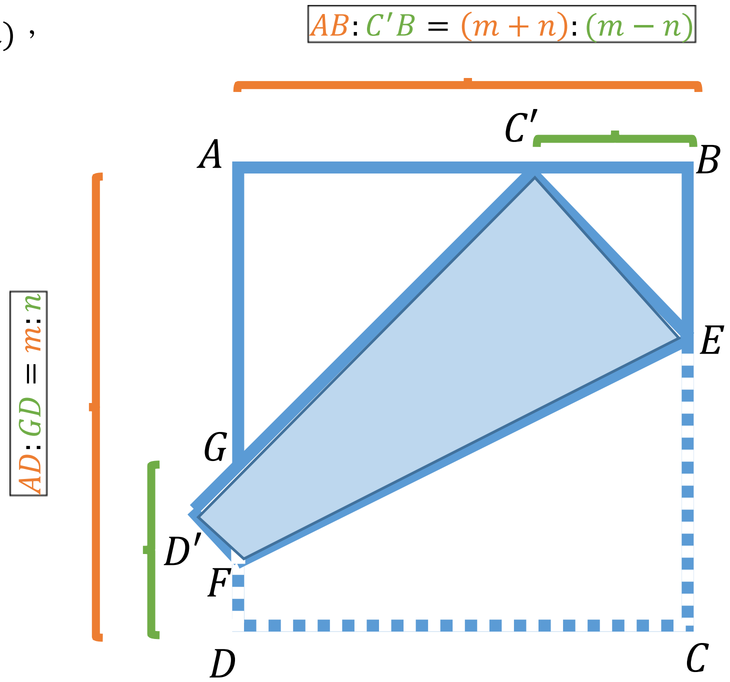
換言之，當$AB: C'B = m: n$時，可得$AD: GD = (m+n): (m-n)$。

第二章重點

如正方形摺紙本來比例$AB: C'B = m: n$，
那麼$AD: GD = (m+n): (m-n)$。



相反，如正方形摺紙本來
比例$AB: C'B = (m+n): (m-n)$，
那麼$AD: GD = m: n$。



對稱性關係表：

$AB: C'B$	$BE: BC': C'E$	$AD: GD$
$m: n$	$(m^2-n^2): 2mn: (m^2+n^2)$	$(m+n): (m-n)$
$(m+n): (m-n)$	$2mn: (m^2-n^2): (m^2+n^2)$	$m: n$

只要找到m及n的數值，就能摺出相關畢氏三元數邊長比例的三角形。

第三章重點

在此章節，我們在第二章的對稱表作延伸，稱第k組對稱表組合所得的m及n為m_k及n_k，那麼$m_{k+1} = m_k + (m_k + n_k) = 2m_k + n_k$ 及$n_{k+1} = n_k + (m_k - n_k) = m_k$

第一組		
$\boldsymbol{AB}: \boldsymbol{C'B}$	$BE: BC': C'E$	$AD: GD$
$\boldsymbol{m}: \boldsymbol{n}$	$(m^2 - n^2): 2mn: (m^2 + n^2)$	$(m + n): (m - n)$
$(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}): (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n})$	$2mn: (m^2 - n^2): (m^2 + n^2)$	$m: n$

第二組	
$\boldsymbol{AB}: \boldsymbol{C'B}$	$AD: GD$
$(\boldsymbol{2m} + \boldsymbol{n}): \boldsymbol{m}$	$(3m + n): (m + n)$
$(\boldsymbol{3m} + \boldsymbol{n}): (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n})$	$(2m + n): m$
第三組	
$\boldsymbol{AB}: \boldsymbol{C'B}$	$AD: GD$
$(\boldsymbol{5m} + \boldsymbol{2n}): (\boldsymbol{2m} + \boldsymbol{n})$	$(7m + 3n): (3m + n)$
$(\boldsymbol{7m} + \boldsymbol{3n}): (\boldsymbol{3m} + \boldsymbol{n})$	$(5m + 2n): (2m + n)$

如此類推。這此組別所得出的畢氏三元數比例的三角形，兩條直角鄰邊的長度相差均相等。

換言之，我們在此章節證明了第一組的$\Delta BEC'$直角鄰邊長度相差$= |({m_1}^2 - {n_1}^2) - 2m_1n_1| = d$的話，之後組別的直角鄰邊長度相差都是$= d$。

當中$d = 1$更是我們特別有興趣研究的類別：

第一組		
$\boldsymbol{AB: C'B}$	$BE: BC': C'E$	$AD: GD$
$\mathbf{2: 1}$	$3: 4: 5$	$3: 1$
$\mathbf{3: 1}$	$4: 3: 5$	$2: 1$
第二組		
$\boldsymbol{AB: C'B}$	$BE: BC': C'E$	$AD: GD$
$\mathbf{5: 2}$	$(5^2 - 2^2): 2(5)(2): (5^2 + 2^2)$ $= 21: 20: 29$	$(5 + 2): (5 - 2)$ $= 7: 3$
$\mathbf{7: 3}$	$20: 21: 29$	$5: 2$
第三組		
$\boldsymbol{AB: C'B}$	$BE: BC': C'E$	$AD: GD$
$\mathbf{12: 5}$	$(12^2 - 5^2): 2(12)(5): (12^2 + 5^2)$ $= 119: 120: 169$	$(12 + 5): (12 - 5)$ $= 17: 7$
$\mathbf{17: 7}$	$120: 119: 169$	$12: 5$
第四組		
$\boldsymbol{AB: C'B}$	$BE: BC': C'E$	$AD: GD$
$\mathbf{29: 12}$	$(29^2 - 12^2): 2(29)(12): (29^2 + 12^2)$ $= 697: 696: 985$	$(29 + 12): (29 - 12)$ $= 41: 17$
$\mathbf{41: 17}$	$696: 697: 985$	$29: 12$
第五組		
$\boldsymbol{AB: C'B}$	$BE: BC': C'E$	$AD: GD$
$\mathbf{70: 29}$	$(70^2 - 29^2): 2(70)(29): (70^2 + 29^2)$ $= 4059: 4060: 5741$	$(70 + 29): (70 - 29)$ $= 99: 41$
$\mathbf{99: 41}$	$4060: 4059: 5741$	$70: 29$

如此類推。

第四章重點

透過第二章的對稱性，當中$AB: C'B$的兩個比例$m: n$及$(m+n): (m-n)$為正方形同一邊作出兩條摺痕，並將其對摺，新的摺痕$AB: C'B$比例為

$$\frac{n'}{m'} = \left(\frac{n}{m} + \frac{m-n}{m+n}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{m^2+n^2}{2m(m+n)} \ ,$$

而新一組的$m': n'$比例有以下的規律

$$m_{k+1} = 2m_k(m_k+n_k)\text{及}n_{k+1} = {m_k}^2 + {n_k}^2$$

只要重覆這個方法將紙的一角C摺到AB上的一點C'，所得的直角鄰邊長度相差 1 的畢氏三角形比例如下：

第一摺： 由能摺出邊長比例$\mathbf{3: 4: 5}$的畢氏三角形 (即$\boldsymbol{m=2, n=1}$)的正方形紙原形摺出

邊長比例$\mathbf{119: 120: 169}$的畢氏三角形 (即$\boldsymbol{m=12, n=5}$)

第二摺： 由能摺出邊長比例$\mathbf{119: 120: 169}$的畢氏三角形 (即$\boldsymbol{m=12, n=5}$)的正方形紙原形摺出

邊長比例$\mathbf{137903: 137904: 195025}$的畢氏三角形 (即$\boldsymbol{m=408, n=169}$)

第三摺： 由能摺出邊長比例$\mathbf{137903: 137904: 195025}$的畢氏三角形 (即$\boldsymbol{m=408, n=169}$)的正方形紙原形摺出

邊長比例$\mathbf{183648021599: 183648021600: 259717522849}$的畢氏三角形

(即$\boldsymbol{m=470832, n=195025}$)

以此方法去到第十摺，所得數字更有超過 600 個位，大大加快了找這些極大數值所組成的直角鄰邊長度相差 1 的畢氏三角形。

參考資料

[1] https://plus.maths.org/content/folding-numbers
[2] 不摺無數：從芳賀定理談正方形色紙邊長三等份摺紙的延伸
https://www.sec.ntnu.edu.tw/uploads/asset/data/62d901a20e0b30ca69b36955/3-P26-45-110033-%E6%9D%8E%E6%94%BF%E6%86%B2-%E7%A7%91%E5%AD%B8%E6%95%99%E5%AE%A4-%E4%B8%8D%E6%91%BA%E7%84%A1%E6%95%B8-%E5%BE%9E%E8%8A%B3%E8%B3%80%E5%AE%9A%E7%90%86%E8%AB%87%E6%AD%A3%E6%96%B9%E5%BD%A2%E8%89%B2%E7%B4%99%E9%82%8A%E9%95%B7%E4%BA%8C%E7%AD%89%E4%BB%BD%E6%91%BA%E7%B4%99%E7%9A%84%E5%BB%B6%E4%BC%B8-0719.pdf