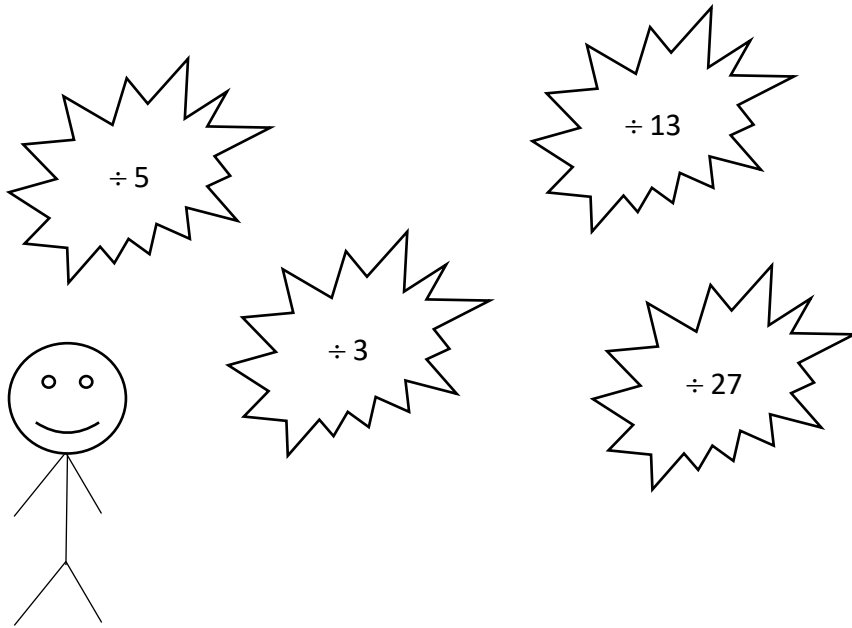


Mathematics Project Competition (2023/24)  
 數學專題習作比賽 (2023/24)  
 Information Sheet 資料頁

Category 參賽組別	<input checked="" type="checkbox"/> * A 組：初中習作 (Category A: Junior secondary project) <input type="checkbox"/> * B 組：中一小型習作 (Category B: S1 mini-project)			
Title of Project 專題習作題目	初探整除規則			
Name of School	Wong Shiu Chi Secondary School			
學校名稱	王肇枝中學			
Team members 隊員		Name in English	中文姓名	Class 班別
	1	CHIU DICK HIN	趙迪軒	2D
	2	CHUI HOI TUNG	徐愷潼	2D
	3	LIU PAK LUN	劉柏麟	2D
	4	WANG QIZHI	王啓之	2D
	5	WAT TSZ FUNG	屈梓峰	2D
	6	WU CHING LONG	胡程朗	2D

# 初探整除規則



## 目錄

第一章 研究動機.....	4
第二章 同餘.....	6
第三章 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11 整除規則的理順.....	9
第四章 合成數判別法 6, 12 整除性規則的理順.....	16
第五章 初探百進制下的整除規則.....	20
第六章 不同進制下的整除規則 .....	23
第七章 總結不同的整除規則 .....	26
備註：參考 .....	29

## 第一章 研究動機

在小學和中學的課程裏，我們需學習 2、3、4、5、6、8、9 和 10 的整除性判別方法，但這些規則為何有效？背後是否有其通則？若有的話，可否如何擴展到所有數字都有效？

我們先嘗試在維基百科[1]上找出除數 2–15 的整除規則，並經過搜索和分析，我們發現這些整除規則可分為幾大類：

除數	整除規則	分類
2	末位是偶數（0、2、4、6、8）。	末位數字
3	計算各位之和，其結果能被 3 整除。	數字和
4	末兩位能被 4 整除。	末位數字
	十位數乘 2 加個位數，其結果能被 4 整除。	餘數序列相加
5	末位是 0、5。	末位數字
6	能同時被 2、3 整除。	合成數判別
7	每三位分組，從右往左每組交替加減，其結果能被 7 整除。	數字差
	從右往左每六位為一組，每組相加的結果能被 7 整除。	數字和
	個位數乘 2，並從其餘位中減去，其結果能被 7 整除。	連續割尾法
	末兩位加其餘位乘以 2，其結果能被 7 整除。	連續割頭法
	從末位起由右至左依次乘 1、3、2、-1、-3、-2（循環），相加的結果能被 7 整除。	餘數序列相加
8	末三位能被 8 整除。	末位數字
9	計算各位之和，其結果能被 9 整除。	數字和
10	末位是 0。	末位數字
11	從高位到低位交錯加減，其結果能被 11 整除。	數字差
	從右往左每兩位為一組，每組相加的結果能被 11 整除。	數字和
	末位被其餘位減去，其結果能被 11 整除。	連續割尾法

12	能同時被 3、4 整除。	合成數判別
	將末位從其餘位乘 2 中減去，其結果能被 12 整除。	餘數序列相加
13	每三位分組，從右往左每組交替加減，其結果能被 13 整除。	數字差
	從右往左每六位為一組，每組相加的結果能被 13 整除。	數字和
	末位乘 4，加到其餘位中，其結果能被 13 整除。	連續割尾法
	將末兩位從其餘位乘 4 中減去，其結果能被 13 整除。	連續割頭法
14	能同時被 2、7 整除。	合成數判別
	末兩位與其餘位乘 2 相加，其結果能被 14 整除。	連續割頭法
15	能同時被 3、5 整除。	合成數判別

不難發現，若考慮及運算複雜度，沒有一套整除規則適用於所有數字，而某些整除規則在某數使用看起來更方便，但在某數又好像果難重重。

在這個報告中，我們先探究如何使用同餘，透過理順各數字的整除規則，探討六種方法背後的數學原理。

六種方法為：

1. 末位數字判別法
2. 數字和
3. 數字差
4. 餘數序列相加
5. 合成數判別法
6. 連續割尾法

對於這個問題

「某一正整數  $n$ ，如何建立整除規則？」

我們的最後會作出一點嘗試，使用這六種方法為 16 – 40 提供整除規則。

## 第七章 總結不同的整除規則

在這一章，我們將對於這個問題

「某一正整數  $n$ ，如何建立整除規則？」

我們在最後會作出一點嘗試，使用這六種方法為 16 – 30 提供整除規則。

在十進制的情況下，我們探討了幾套整除性規則

- |                                |        |
|--------------------------------|--------|
| 1. $N = 2^p \times 5^q$        | 末位數字法  |
| 2. $N = 3, 9$                  | 數字和    |
| 3. $N = 11$                    | 數字差    |
| 4. $N$ 為正整數                    | 餘數序列相加 |
| 5. $N$ 為合成數                    | 合成數判別法 |
| 6. $Nk \equiv \pm 1 \pmod{10}$ | 連續割尾法  |

我們不難發現方法 1, 2, 3 及 5 均有所限制之下才可使用，而 1, 2 和 3 的方便度是很高的。而 5 是我們拆解問題的利器，始終將一個數字降解為數個小數字之後，複雜程度大為下降。

例：

50645066556600 能否被 540 整除？

觀察到  $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

觀察末兩位數字，該數可被 4 及 5 整除。

$$1000 \equiv 1 \pmod{27}$$

$600 + 556 + 66 + 645 + 50 \rightarrow 1917 \rightarrow 918$  可被 27 整除。

故此這數可被 540 整除

若考慮方法 4 和 5，他們也是通用性強的方法，方法 4 是甚至沒有條件限制，但需了解每個位值除數後的餘數，再作序列加減，較難快速實現。

而方法 5 則為只要想到一個  $Nk \equiv \pm 1 \pmod{10}$  為引子就可以創造出合適的方法，較為理想。

由 16– 40 的整除性方法

除數	整除規則	分類
16	$16 = 2^4$ ，取末四位數字 判斷末四位能否被 16 整除。 (可將該數反覆除 2，做 4 次)	末位數字
17	$17 \times 3 = 51 \equiv 1 \pmod{10}$ 個位數乘 5，並從其餘位中減去，其結果能被 17 整除。	連續割尾法
18	$18 = 2 \times 3^2$ 判斷末位是否雙數及 個位數字和判斷能否被 9 整除。	合成數判別 末位數字 數字和
19	$19 \equiv -1 \pmod{10}$ 個位數乘 2，並從其餘位中加上去，其結果能被 19 整除。	連續割尾法
20	$20 = 2^2 \times 5$ ，取末兩位數字 判斷末兩位能否被 20 整除。	末位數字
21	$21 = 3 \times 7$ 個位數字和判斷能否被 3 整除及 個位數乘 2，並從其餘位中減去，其結果能被 7 整除。	合成數判別 數字和 連續割尾法
22	$22 = 2 \times 11$ 末位數字是否雙數及 數字差能否被 11 整除。	合成數判別 末位數字 數字差
23	$23 \times 3 = 69 \equiv -1 \pmod{10}$ 個位數乘 7，並從其餘位中加上，其結果能被 23 整除。	連續割尾法
24	$24 = 2^3 \times 3$ 判斷末三位能否被 3 整除及 個位數字和判斷能否被 3 整除。	合成數判別 末位數字 數字和
25	$25 = 5^2$ ，取末兩位數字 判斷末兩位能否被 25 整除。	末位數字
26	$26 = 2 \times 13$ 判斷末位是否雙數及 個位數乘 4，並從其餘位中加上，其結果能被 13 整除。	合成數判別 末位數字 連續割尾法

	除。	
27	$27 = 3^3$ $1000 = 1 \pmod{27}$ 每三位分組，各組相加，其結果能被 27 整除。	數字和

28	$28 = 2^2 \times 7$ 判斷末兩位能否被 4 整除及 個位數乘 2，並從其餘位中減去，其結果能被 7 整除。	合成數判別 末位數字 連續割尾法
29	$29 \equiv -1 \pmod{10}$ 個位數乘 3，並從其餘位中加上，其結果能被 29 整除。	連續割尾法
30	$30 = 2 \times 3 \times 5$ 判斷末位是否 0 及 個位數字和判斷能否被 3 整除。	合成數判別 末位數字 數字和
31	$29 \equiv 1 \pmod{10}$ 個位數乘 3，並從其餘位中減去，其結果能被 31 整除。	連續割尾法
32	$30 = 2^5$ 判斷末五位能否被 32 整除。 (可將該數反覆除 2，做 5 次)	末位數字
33	$33 = 3 \times 11$ 個位數字和判斷能否被 3 整除及 個位數字差判斷能否被 11 整除。	合成數判別 數字和 數字差
34	$34 = 2 \times 17$ 判斷末位是否雙數及 個位數乘 5，並從其餘位中減去，其結果能被 17 整除。	合成數判別 末位數字 連續割尾法
35	$35 = 5 \times 7$ 判斷末位是否 0 或 5 及 個位數乘 2，並從其餘位中減去，其結果能被 7 整除。	合成數判別 末位數字 連續割尾法
36	$36 = 2^2 \times 3^2$ 判斷末位是否雙數及 個位數字和判斷能否被 9 整除。	合成數判別 末位數字 數字和
37	$37 \times 3 = 111 \equiv 1 \pmod{10}$ 個位數乘 11，並從其餘位中減去，其結果能被 37 整除。	連續割尾法
38	$38 = 2 \times 19$	合成數判別



	判斷末位是否雙數及 個位數乘 2，並從其餘位中加上，其結果能被 19 整除。	末位數字 連續割尾法
39	$39 \equiv -1 \pmod{10}$ 個位數乘 4，並從其餘位中加上，其結果能被 39 整除。 (若使用 $39 = 3 \times 13$ ，則需要進行多一次數字和計算)	連續割尾法
40	$40 = 2^3 \times 5$ 判斷末三位是否可被 40 整除。	末位數字

**備註：參考**

[1]: 維基百科 – 整除規則條目

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%95%B4%E9%99%A4%E8%A7%84%E5%88%99>