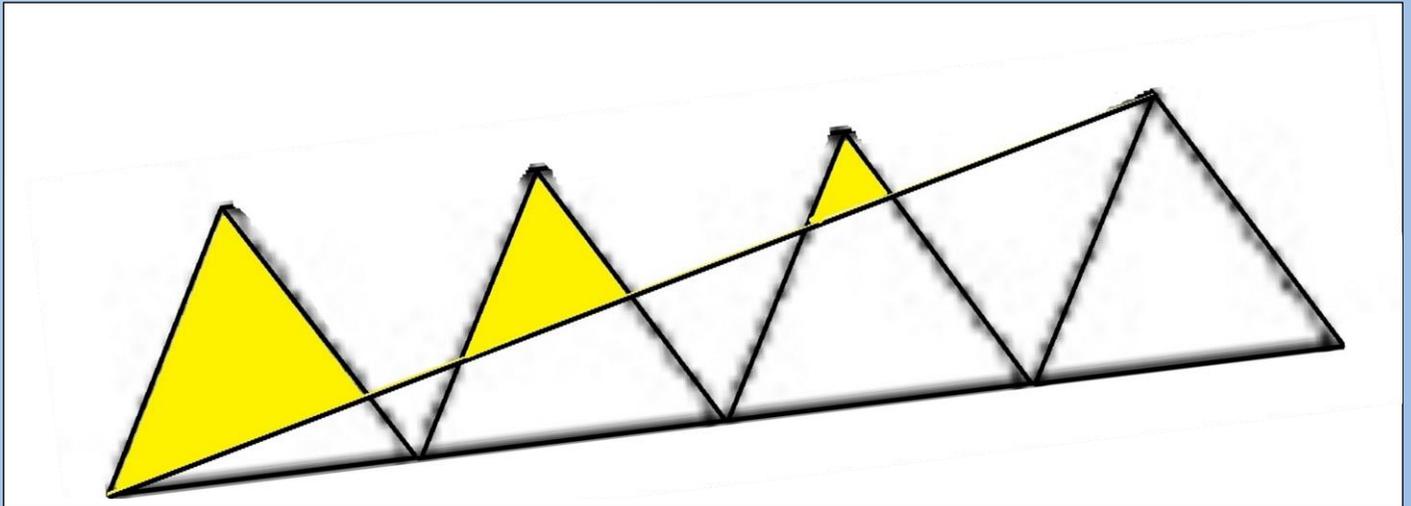
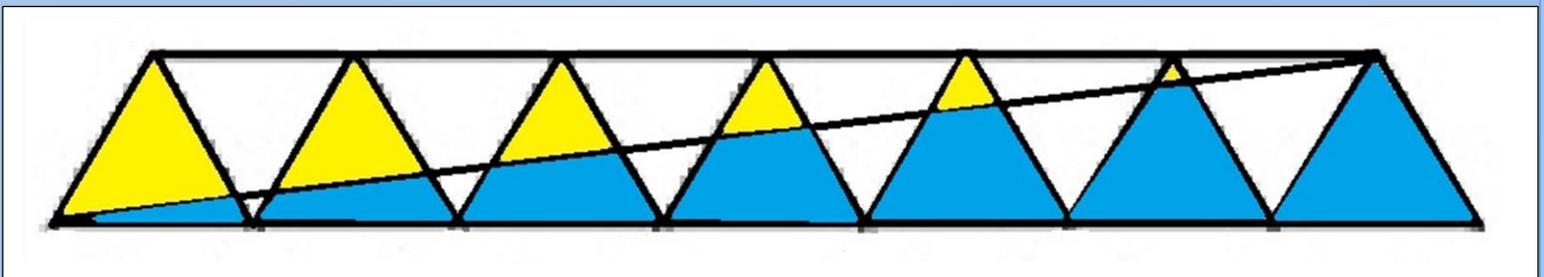


WONG SHIU CHI SECONDARY SCHOOL

王肇枝中學



連續三角形列上的面積問題



CHAN HIU TSUNG

陳曉璁 2A

CHEN WAN SUM

陳昫芯 2A

LI TSZ MUK

李子木 2A

MA HAU WING

馬巧穎 2A

SHI WAI YI

施慧宜 2A

ZHONG TSZ SHAN

鍾紫珊 2A

目錄：

章節	內容	頁數
一·	引言	3
二·	簡介	4
三·	研習流程	6
四·	相關數學原理	7
五·	不同數目的連續三角形列面積計算	
	A. 三角形數目=2	13
	B. 三角形數目=3	15
	C. 三角形數目=4	21
	D. 三角形數目=5	27
	E. 三角形數目=6	33
	F. 三角形數目=7	39
六·	N 個連續三角形列的面積通式	45
七·	三角形數目與面積的關係	
	A. 三角形總面積	52
	B. 三角形剩餘總面積	54
	C. 平均面積	57
	D. 最大三角形面積	61
	E. 最小三角形面積	65
八·	問題的進一步推廣	
	A. 任意三角形	69
	B. 梯形	74
九·	總結	78
十·	組員感想	79
十一·	參考資料	80

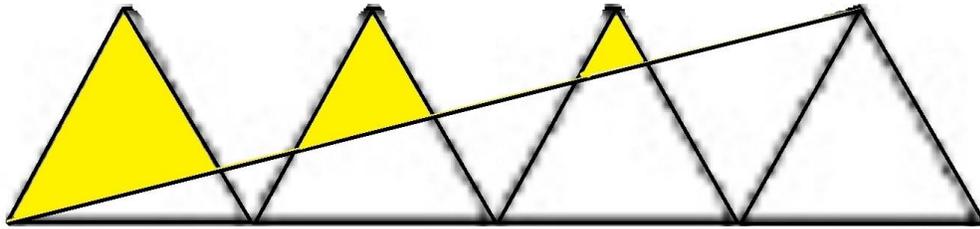
第一章 引言

把三個全等大小的等邊三角形排成一列，然後從第一個三角形左下角和最後一個三角形最上面的頂點（右上角）畫一直線（對角線），那該直線把這一排三角形切開兩部分，那直線上面那些小三角形的面積以致其總面積該如何計算？

之後會進一步引伸：增加三角形之數目，看計出來的三角形面積及總面積；三角形數目為 n ，用代數方法找出個三角形面積及總面積通項；三角形數目及總面積的關係；以及探討其他種類三角形的可能性。

第二章 簡介

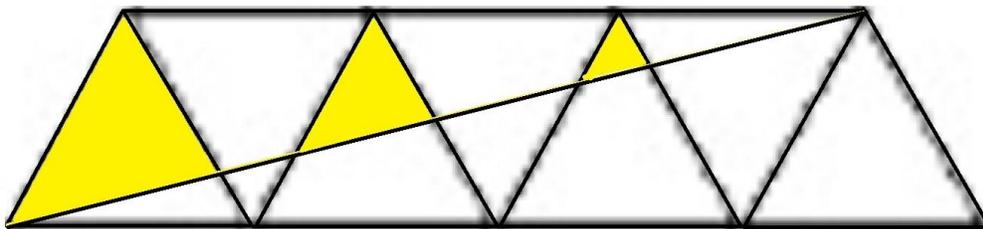
本研習由一條網上常見的趣味數學題：Triangles in a Row 開始:



問：假設每個三角形為六平方單位，那陰影三角形的面積總和為多少？

解決方法:

加一條線穿過三角形的頂點（上面那個）由於三角形屬於全等，所以一條水平線必能穿過所有三角形的頂點：



加了上述水平線後，多了三個「倒三角」，不難證明到這些三角形也是等邊三角形，而且和其他三角形全等。透過全等，我們找出哪幾組線是屬平行，換句話說，圖中既必定有相似三角形，亦應該會有等邊三角形以外的其他全等三角形。此外，這些三角形的底長都是相同的。

透過全等、相似三角形找出黃色三角形的邊長度比，面積比等，去計算出每個三角形的面積，以至三角形面積總和。

然後我們還會做以下的一些延伸:

1. 同一個題目：但當三角形數目增加時，能不能用類似的方法，找出圖形中各三角形面積及總面積？
2. 如把題目改為 n 個三角形，如何找出圖形中各三角形面積以及總面積的通項？
3. 三角形的數目和個別面積或總面積有沒有特別的關係？
4. 題目主要是利用全等的等邊三角形去做研習，同等的理論能應用在其他全等三角形嗎？

在這個研習，我們嘗試對上述問題做更深入的探究，並整理我們所得的計算或證明過程、算式、一些圖表及其他發現寫在此報告內。

第三章 研習流程

1. 觀看這條題目的示範：關於 **triangle in a row** 的題解網頁和影片，有些網頁更有相關题目的介紹及相關的筆記，這是我們重要的資料來源。
2. 我們先以等邊三角形為研習起點，並改以已設定邊長為 l （並非如範例般設定面積），開始嘗試計算相關三角形的面積和總面積。
3. 開始需要重溫部分書本上的課題，如三角比、面積比、全等和相似三角形的概念等等。
4. 由最基本的兩個三角形開始（一個三角形並無意義），按题目的做法劃線切割，找出相關切割出來的三角形的面積（由於只能切出一個三角形，所以面積和總面積同是一回事）。
5. 到了三個三角形，劃線切割後由於切割出的三角形只得兩個，利用中點定理(Mid-point Theorem)、截距定理(Intercept Theorem)已能找出各三角形邊長和面積，以及面積之和。
6. 之後每次增加一個三角形，那麼連接頭尾的直線分割而成的三角形，亦自然地相應增加；由於三角形數目增加，就要利用相似三角形、邊長比等知識，嘗試以相似的做法找出各三角形邊長和面積，以及總面積。
7. 重複數次(6)之後，大致找出不論多少個三角形合併在一起，其推算法的規律都是大同小異的，所以就開始找出不同的 n 值（即 $n-1$ 個三角形）分割出來的三角形邊長，面積及總面積的通解（通式）。
8. 找到通式，就容易有一堆數據，我們找出不同三角形數目及其面積，然後用 Excel 繪畫出不同的 X Y 分佈圖，看看三角形數目面積之間有沒有關係。
9. 找出如何把上述理論和算式應用在其他類型的三角形、或三角形分佈。

把研習所得的整理寫成研習報告。

第九章 總結

一系列連續的等邊三角形，如邊長為 l ，那對角斜線上面的三角形總面積：

三角形數目	總面積
2	$\frac{\sqrt{3}}{8} l^2 = \frac{3\sqrt{3}}{24} l^2$
3	$\frac{5\sqrt{3}}{24} l^2$
4	$\frac{7\sqrt{3}}{24} l^2$
5	$\frac{3\sqrt{3}}{8} l^2 = \frac{9\sqrt{3}}{24} l^2$
6	$\frac{11\sqrt{3}}{24} l^2$
7	$\frac{13\sqrt{3}}{24} l^2$
N	$\frac{\sqrt{3}(2n-1)}{24} l^2$

三角形數目與面積的關係（三角形數目愈多，面積愈……）

探究項目	關係
總面積	直線關係
剩餘面積	直線關係
平址面積	趨向 1/3 個三角形面積
最大三角形面積	趨向一整個三角形面積
最小三角形面積	趨向 0

此外，我們探究過任意三角形和梯形列，發現可用類似方法找連續圖形列對角線上圖形個別面積和總面積。

第十一章 參考資料

1. K. H. Yeung, C. M. Yeung, Y. F. Kwok, H. Y. Cheung, Junior Secondary Mathematics in Action 2B (2021 Edition), Chapter 8 and 12, Pearson: 2021
2. K. H. Yeung, C. M. Yeung, Y. F. Kwok, H. Y. Cheung, Junior Secondary Mathematics in Action 2A (2021 Edition), Chapter 4 and 5, Pearson: 2021
3. K. H. Yeung, C. M. Yeung, Y. F. Kwok, H. Y. Cheung, Junior Secondary Mathematics in Action 3A (2021 Edition), Chapter 5, Pearson: 2022
4. K. H. Yeung, C. M. Yeung, Y. F. Kwok, H. Y. Cheung, Junior Secondary Mathematics in Action 3B (2021 Edition), Chapter 7, Pearson: 2022
5. Triangles in a row: <https://www.youtube.com/watch?v=mOxnEn9qWwo>
6. Triangles in a row: <https://www.mathpages.com/home/kmath779/kmath779.htm>
7. 平方數的和: <https://www.cuemath.com/algebra/sum-of-squares>
8. Area of triangles: <https://www.mathsisfun.com/algebra/trig-area-triangle-without-right-angle.html>