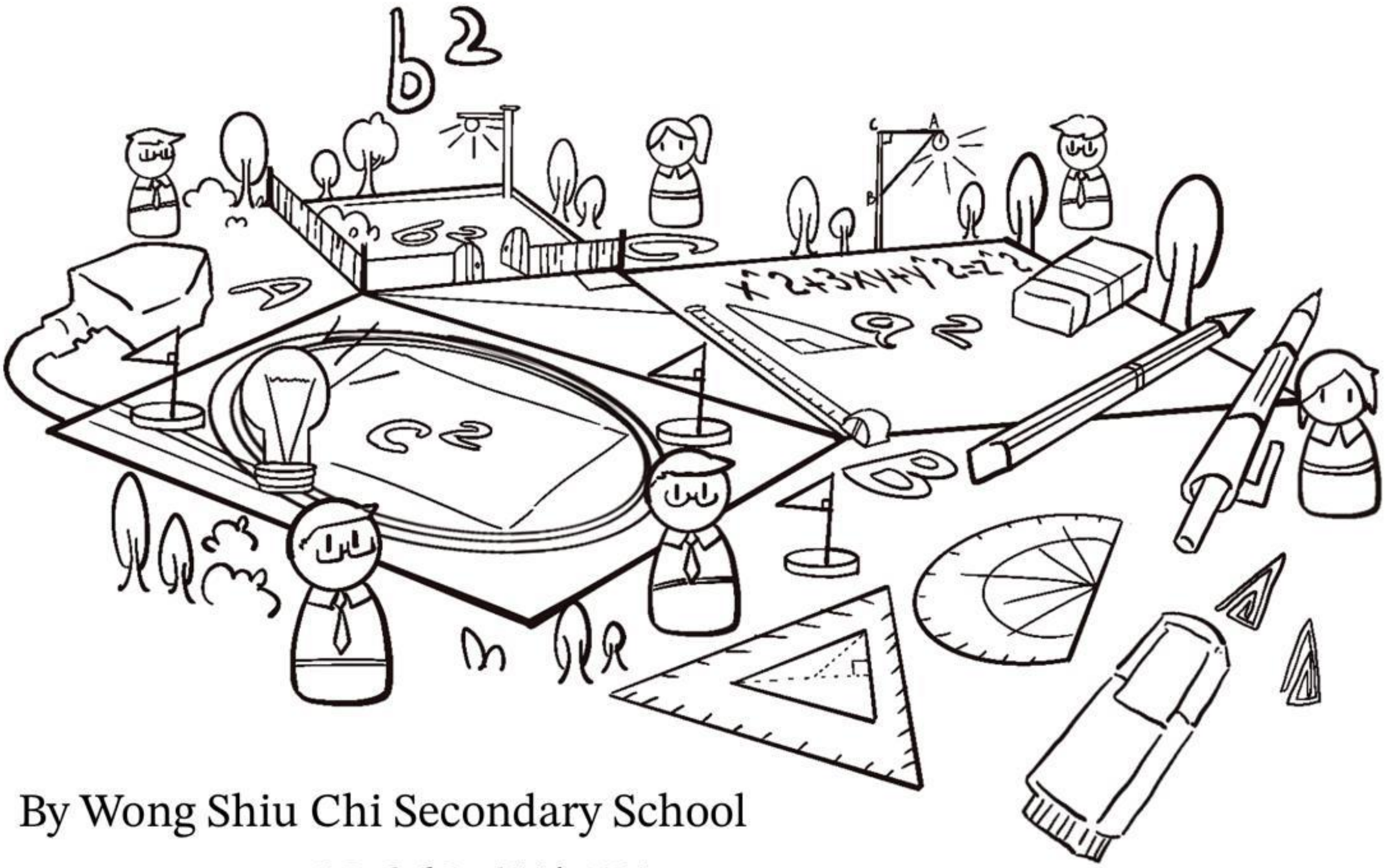
Extract

海倫三角形的尋根之旅



By Wong Shiu Chi Secondary School

2B 7 IP MING HIN
2B 19 MAK HO LONG ALVIN
2B 22 PANG HUNG YU
2B 26 WANG MING WAI EMILY
2B 27 WEI JENNY
2B 31 YIP WING HONG WALLACE

目錄

章節一　引言

在中二的課程中，我們學習到畢氏定理，了解到直角三角形的特性及畢氏三角形。同時亦認識到海倫三角形的組成。此研習的目的，是由海倫三角形中的邊長關係，探究某類代數式的整數解及三角形周界面積及內接圓半徑的關係。

章節二　研究背景及目的

畢氏三角形的相關特性，雖然不是一般課程上要求的知識，但在學習畢氏定理的課程中，我們都給這些整數邊長的直角三角形迷住，希望從中能夠找到一些特別的數學關係。有鑑於數學專題研習需要有原創性及不重覆以往研習報告的成果，我們唯有作出於畢氏三角形的特性上作不同的假設，務求從中找到一點啟發。領隊老師亦給予我們不少意見，亦提供不同的非中二課程所用的數學工具，以處理我們對畢氏三角形以至於海倫三角形的疑問，從而探究出這些看似只是幾何的問題，蘊含著不少獨特的代數關係。

例如此前，我們都知道$x^2 + 2xy + y^2 = z^2$當中，只要z是$x + y$，任何整數x及y都是此方程的解，但$x^2 + 3xy + y^2 = z^2$呢？就完全摸不著頭腦，但原來運用海倫三角形的一些特性，就可以找到相關的解。

另外，我們亦透過文獻看到一些海倫三角形的周界及面積相等，看起來與我們集中研究的海倫三角形有關，我們希望了解是否一定的數學原因，會出現這種周界等於面積的海倫三角形。

除此之外，我們也知道內接圓半徑是三角形面積除以其半周界，透過這一次的探究，我們打算在內接圓半徑是一個特定數(2 以後的質數)時，能否找到相關的鈍角海倫三角形。

章節三　研究方法

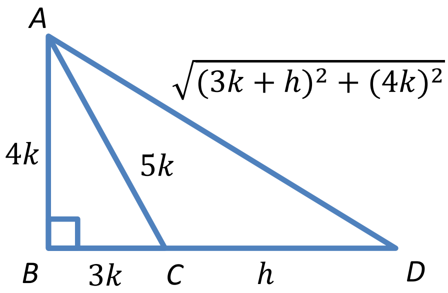
我們首先想做的事，是找出不同的畢氏三角形，透過兩個畢氏三角形的拼貼，從而找出非直角的海倫三角形。故此，我們透過找畢氏三元數的方法，即三邊邊長為$(u^2-v^2, 2uv, u^2+v^2)$的公式列表，找出公共邊，只要兩個畢氏三角形的邊長相同，就可以進行拼貼，就能找出一個不等邊海倫三角形，海倫三角形的特色是邊長與面積都是整數。

因應研究的深度要求，三角形面積除了以A＝$\frac{底\times高}{2}$作運算外，我們也應用到海倫公式(Heron's Formula)，即A＝$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，而當中 s 是邊長為 a, b 及 c 的三角形的半周界，而當中的$s(s-a)(s-b)(s-c)$項之間的關係，亦是我們研究範圍之一。因為重閱本校以往的數學專題研習報告，知道畢氏三角形在這些數字上會有一些有趣的關係，故此報告希望延伸至鈍角不等邊海倫三角形，我們嘗試找出它們面積及邊長的關係，看看不同的關係會否有其他數學意義。

另外，我們需要以畢氏定理及一般的代數運算，以完成本研習報告的一些數學證明。

章節八　總結

我們的探究開始於以下的ΔACD，即是一個由分割出邊長為$(3k,4k,5k)$的畢氏三角形而成的海倫三角形，在我們這份研習報告中，目的是在這個海倫三角形中，找出一些有趣的數學關係。



<u>結論 1：</u>

首先，在章節五中，我們可知當設ΔACD的三邊邊長由短至長設為(a,b,c)及 s 為半周界。同時設$p=s-c,q=s-b,r=s-a$，那麼所得的$(q,r,p+s)$會是$x^2+3xy+y^2=z^2$中(x,y,z)的解。以下是一些例子：

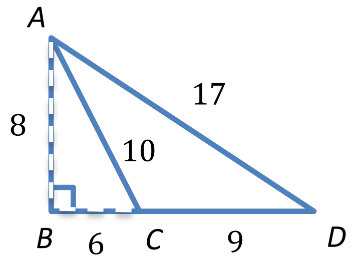
x	y	z
3	7	11
9	8	19
11	15	29
5	24	31
13	24	41
21	32	59
7	51	61
17	48	71
16	57	79
19	63	89

結論 2：

在於章節六，我們在研究這些海倫三角形的特性時，亦證明了此類的ΔACD可做出唯有的三個非直角的海倫三角形，面積與周界相等。情況如下：

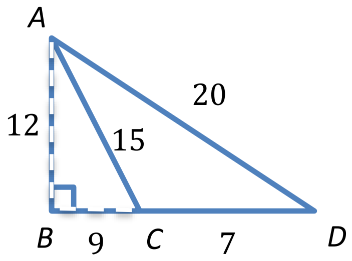
情況一：當$k = 2$，$h = 5 + \frac{4}{2-1} = 9$，

所得便是邊長為(9,10,17)的海倫三角形。



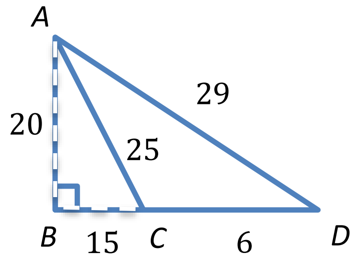
情況二：當$k = 3$，$h = 5 + \frac{4}{3-1} = 7$，

所得便是邊長為(7,15,20)的海倫三角形。



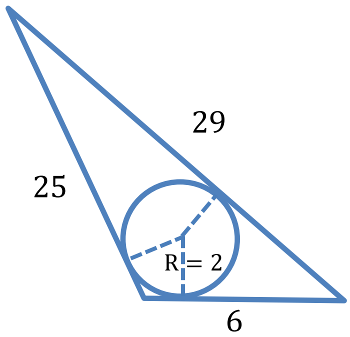
情況三：當$k = 5$，$h = 5 + \frac{4}{5-1} = 6$，

所得便是邊長為(6,25,29)的海倫三角形。

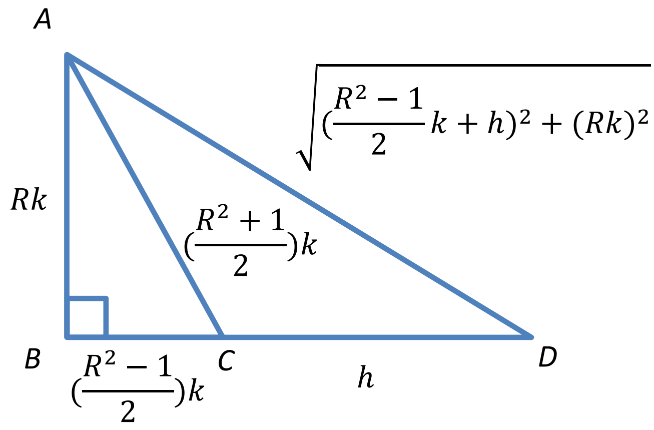


結論 3：

而此探究的重點在於章節七，，在章節 6.3 的三個三角形中，我們知道其內接圓半徑$\mathrm{R} = 2$，如下圖

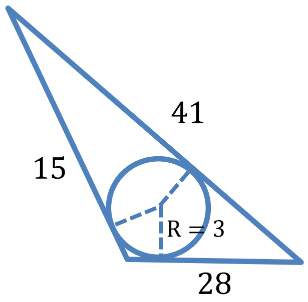
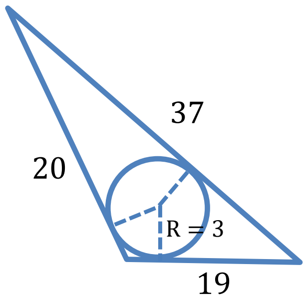
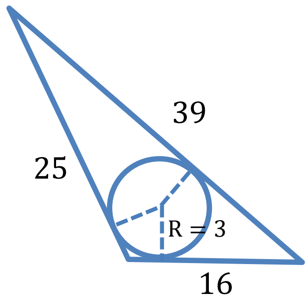
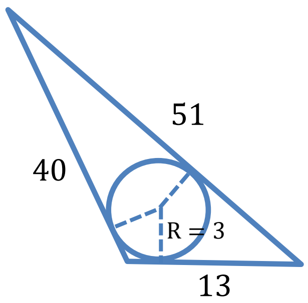
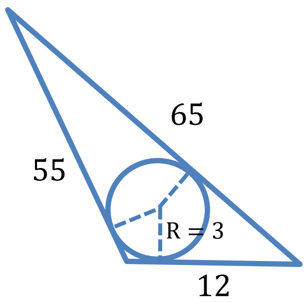
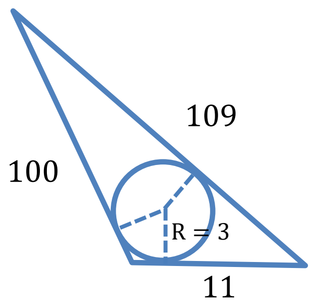


我們考慮$\mathrm{R} = 2$以外質數的R，尋找內接圓半徑$= R$的海倫三角形。我們透過下圖及通過運算得知各自會有 6 組相關(h, k)的解。



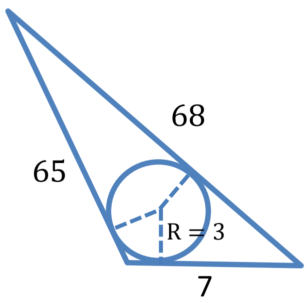
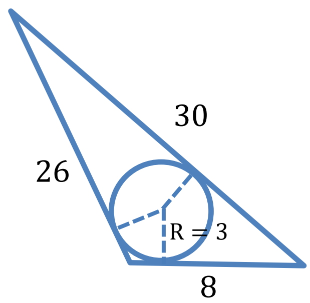
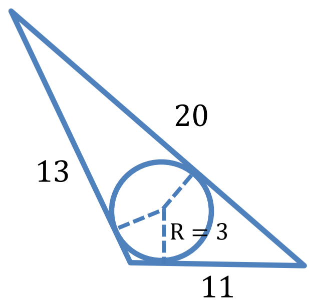
(h,k)的解會是
$(3R^2+1,3),(2R^2+1,4),(R^2+2R+1,R+2),$
$(R^2+R+1,2R+2),(R^2+3,R^2+2)$及$(R^2+2,2R^2+2)$

例如$R=3$，即一海倫三角形的內接圓半徑$=3$，所得出$p=1$情況下$(\alpha:\beta:\gamma)=(4:3:5)$的 6 個鈍角海倫三角形為

$p=1$ 的情況		
		
$(h,k)=(28,3)$ ΔACD三邊邊長為 $(15,28,41)$	$(h,k)=(19,4)$ ΔACD三邊邊長為 $(19,20,37)$	$(h,k)=(16,5)$ ΔACD三邊邊長為 $(16,25,39)$
		
$(h,k)=(13,8)$ ΔACD三邊邊長為 $(13,40,51)$	$(h,k)=(12,11)$ ΔACD三邊邊長為 $(12,55,65)$	$(h,k)=(11,20)$ ΔACD三邊邊長為 $(11,100,109)$

但當R越大，p 的可能值就越多，因 p 只需是小於 R 的正整數就可以找到更多符合相關條件的海倫三角形。

例如$R = 3$，而$p = 2$情況下$(\alpha:\beta:\gamma) = (5:12:13)$就有以下三個鈍角海倫三角形

<table>
<tr><td colspan="3">$p = 2$ 的情況</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$(h,k) = (7,5)$
ΔACD三邊邊長為
(7,65,68)</td>
<td>$(h,k) = (8,2)$
ΔACD三邊邊長為
(8,26,30)</td>
<td>$(h,k) = (11,1)$
ΔACD三邊邊長為
(11,13,20)</td>
</tr>
</table>

章節十　參考資料

1. 海倫三角形面積與周界相等的參考資料 https://www.m-a.org.uk/resources/6G_Dolan-What_lies_between_12_and_1.pdf

2. 互質畢氏三元數的參考資料 http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/numbers/pyth.pdf

3. 中學數學研習報告 《一切由 1, 2, 3, 6 開始》– 王肇枝中學 2021

4. “Junior Secondary Mathematics in Action 2B (Modular Binding) (2021 edition)”

5. 內接圈半徑而一般三角形的關係 https://en.wikibooks.org/wiki/Trigonometry/Circles_and_Triangles/The_Incircle