

王肇枝中學

Wong Shiu Chi Secondary School



汽水罐問題及其延伸

SODA CAN PROBLEM & ITS EXTENSION



3D	Yu Ping Chiu	余炳超
3A	Mak Ho Wang	麥浩弘
3B	Ng Chun Hin	伍竣軒
3B	Yan King Sum	甄景琛
3E	Shiu Yik Long	蕭湊朗
3E	Wong Pui Lun	黃沛燐

目錄

	封面	P. 1
	目錄	P. 2- 3
	引言+公式+工具	P. 4
第一章	1.1 問題的由來	P. 5
	1.2 假設及定義	P.5
	1.21 假設	P.5
	1.22 定義	P.5
	1.3 力矩及重心	P.6
	1.31 重心位置	P.6
	1.32 最低重心定理	P.6
	1.4 汽水罐的最低重心	P.7
	1.41 一些設定	P.7
	1.42 找尋最低重心公式	P.7- 8
第二章	2.1 一些假設	P. 9
	2.2 直立柱體容器	P. 9
	2.3 橫向正方形柱體容器	P.10
	2.31 平放正方形柱體容器	P.10- 11
	2.32 斜放正方形柱體容器	P.12- 13
	2.4 正方形柱體最低重心比較	P. 14
第三章	3.1 其它橫向柱體	P. 15
	3.2 橫向正三角形柱體容器	P. 15
	3.21 梯形的重心	P. 15- 16
	3.22 平放正三角形柱體容器	P. 17- 18
	3.23 倒放正三角形柱體容器	P. 19- 20

	3.3 正三角形柱體最低重心比較	P. 21
	3.4 平放圓柱體容器	P. 22
	3.41 圓弓形及弧線的重心	P. 22
	3.42 平放汽水罐	P. 22- 23
	3.43 圓柱體最低重心比較	P. 24
第四章	4.1 柱體容器最低重心的比較	P. 25
	4.2 柱體容器的穩定性	P. 25
	4.3 進一步應用	P. 26
	4.31 單層巴士的最安全載客量	P. 26
	4.32 雙層巴士的最安全載客量	P. 27
	4.33 輕鐵車卡的最安全載客量	P. 28
	資料來源	P. 29
	感想	P. 30

引言

生活中處處有關於重心的問題，例如水瓶反轉挑戰，或者摩托車設計等。以下著名的汽水罐問題，更令我們感到好奇。

一個裝滿水的汽水罐，它的重心是在罐子的一半高度。如果飲去部份液體，它的重心將會下移。但當所有汽水飲光，空罐的重心也同樣是高度的一半，這表示汽水罐的液體在減少過程中存在一個最低重心。那麼這位置會在哪裡呢？

對於不同的柱狀瓶子，我們亦發現有類似的最低重心。我們更研究不同擺向的柱體，並比較了相關的結果。

應用到的數學公式及工具

- 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 弧度和角度的對換:

$$\pi = 180^\circ$$

- 如圓心的張角是 2α 及圓半徑為 b ，則弧長及弓形面積分別是：

$$\text{弧長} = 2\alpha b$$

$$\text{弓形面積} = \alpha b^2 - b^2 \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

- Desmos 繪圖工具

第一章: 汽水罐的重心問題

1.1 問題的由來

我們去旅行經常會帶備一罐罐的汽水。

調皮的我們會嘗試把裝滿汽水的罐子傾斜放，試試看哪個角度才有辦法平衡。但是有沒有注意到，隨著罐子裡面的液體的減少，使傾斜的罐子平衡的角度，也就是重心也會隨之不同。開始時液體越少，重心的位置也會越低。但喝完之後，重心又會變回去原本的位置，那麼問題來了 —

到底需要飲多少汽水才會達至最低重心，令汽水罐最不容易翻倒呢？

1.2 假設及定義

1.21 假設

1. 相對於液體，瓶罐外殼的重量可以忽略。
2. 相對於瓶罐外殼，空氣的重量可以忽略。
3. 瓶罐的頂蓋及底部質量可以忽略，也不計算焊接及插口的影響。
4. 在均等情況下，瓶罐的重量和高度成正比。

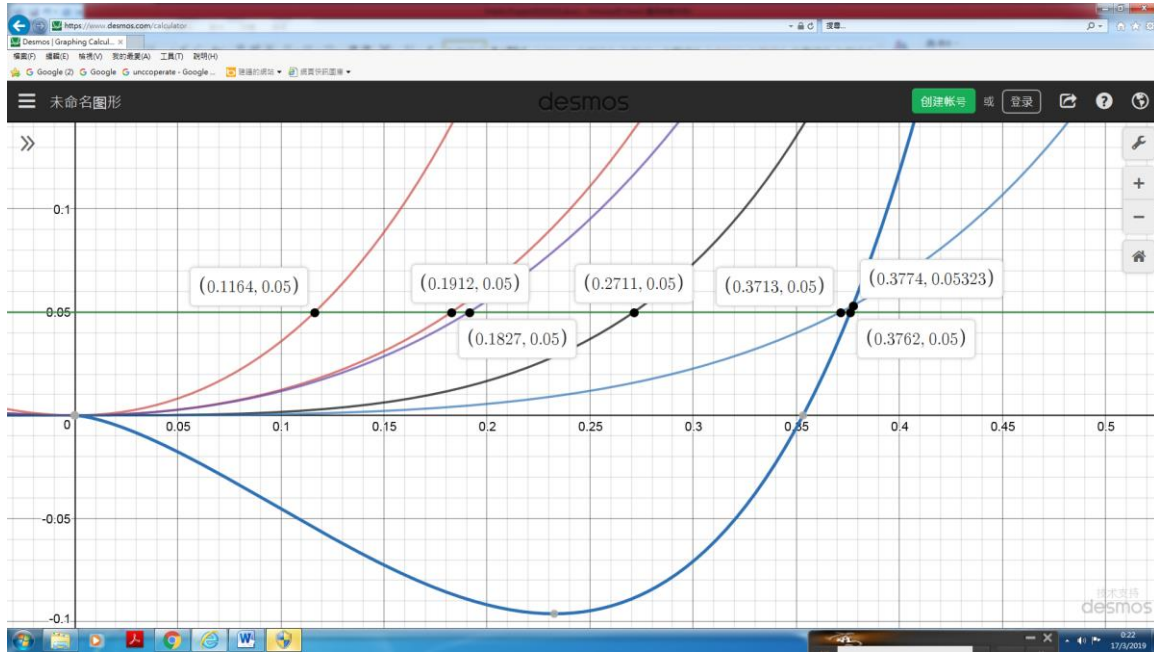
1.22 定義

1. M 代表載滿液體瓶罐的重量。
2. m 代表空罐的重量。
3. H 代表罐的高度。
4. h 代表罐中液體的高度。
5. R 代表 $h:H$ 的比例。

第四章:總結

4.1 柱體容器最低重心的比較

將所有柱體容器的最低重心公式代入 Desmos 繪圖軟件：



從上圖可知平放的等邊三角形柱體有最小的最低重心比，所有直立柱體包括圓柱體則有第二最小的最低重心比。對於 $\frac{m}{M} = 0.05$ ，最低重心比由小到大排列為：

平放三角柱 < 直立柱 < 平放正方柱 < 斜放正方柱 < 倒放三角柱 < 橫放圓柱

當 $\frac{m}{M} \geq 0.05323$ 時，變成以下的大小次序：

平放三角柱 < 直立柱 < 平放正方柱 < 斜放正方柱 < 橫放圓柱 < 倒放三角柱

4.2 柱體容器的穩定性

在平地上有多種因素影響物體的穩定性。除了重心比外，還有支撐的大小及形狀等。所以，所有橫向斜放以及倒放的角柱體或圓柱體容器都是不穩定的。

我們覺得物體在水中的情況會不一樣，重心比應該是穩定性的一個較重要參考因素。在這方面希望我們將來有機會再作進一步探討。

資料來源

1. https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_centroids (Centroids)
2. The Beauty of Everyday Mathematics
3. 香港輕鐵百度百科
4. KMB 九巴專頁

感想

余炳超：

從小喝飲料到現在，理論一直存在於此，可惜我至今才發現，可得我今了解了她，雖不是天下含有事，存在於你我生活中，但是甘願研究的人，古今前後又有多少？我們雖不是數學家，但有著數學的癡迷，對數學的熱愛瘋狂，一點一滴生活瑣事，都可成為研究題目，理論不在乎何時學，知識不在乎哪來得，只有有求學的精神，一罐普通的汽水罐，也能成為研究題目，讓我們能站在這裡，分享著研究的成果，平凡中的不平凡。

麥浩弘：

經過這次專題研習，使我學到在科學研究中，我們要大膽假設，小心求證。為未知嘅事物大膽地作出假，設提供一個合理的解釋，並作實驗去找出真正的原因。在求證的時候要小心謹慎，反復步驟以獲得更準確的結果。為之後的研究定下基礎。我亦學到團隊精神與人合作等等的重要性，為以後的學習，成長，做好基礎。

伍竣軒：

經過這一次的數學研究之後，我們發現了究竟最底重心會在那裏，而且我也發現做每件事都要有興趣，就例如這一次研究是我們發現空罐和滿罐的重心都是一樣才引起我們的好奇心，這一次也能訓練我們的分工能力。總括而言，我這次是獲益良多。

甄景琛：

這次的數學研習對我來說是一個新的體驗，原來日常中的點點滴滴都有著一個個數學原理在背後，令我對數學更有興趣。相比起其他的組員，我的數學能力顯然比較落後，但大家還是包容我，經過一輪分工合作，我們終於做好了研習報告。承蒙組員們的包容，讓我成長了許多。

蕭灃朗：

以前每一天我都會在尋找不同東西的平衡點，不論是書本，日常用品，甚至是食物我都會找一找它們的平衡點。經過今次的一連串嘗試，我們居然可以以特定的方程式去計算他們出來，我再一次感嘆數學的神奇。在今次的研究學到不同的溝通和算術上的不同技能，可謂讓我獲益良多。

黃沛燐：

做完這個專題後，我學到了鍥而不捨的精神。當我們在做這個專題的時候，我們經常留校去做這個專題，甚至我們一開始的時候，連當中的原理也不明白，但我們後來對此找了更多的資料，留了無數次在電腦室裏，我們才可以完成這次專題，這次專題對我的影響不止如此，我更瞭解到我們平常好奇的現象，如反轉水瓶挑戰，可以利用網上尋找更多的資料，可以提升我們的知識。