

Mathematics Project Competition for Secondary Schools (2017/18)

中學數學專題習作比賽 (2017/18)

牛吃草問題和推廣



香港華仁書院

3K 班 李啟天

3K 班 梁智鈞

指導老師：熊啟昇老師

目錄：

P. 4	目錄
P. 5	(一)：介紹/前言
P. 6-7	(二)：典型牛吃草問題
P. 6	例子、解釋及我們的解法
P. 7	其他解法
P. 7	(三)：牛頓的題目和他的解法
P. 8-32	(四)：牛吃草問題的推廣
P. 9	情況 1：典型問題
P. 10	情況 2：長草量隨着時間而增加
P. 14	情況 3：耗草量隨着時間而增加
P. 17	情況 4：長草量和耗草量都隨着時間而增加
P. 16	情況 5：草只於白天生長，不會在晚上生長
P. 22	情況 6：總草量每天比前一天增加 10%
P. 25	情況 7：耗草量變成 2 個部分
P. 29	情況 8：增加一個影響總草量的變數：牛糞量
P. 33-34	(五)：牛吃草問題變種
P. 35	(六)：總結
P. 36	(七)：參考文獻

註：(四)的圖表，除「總草量」和特別說明之外，均為累積數值。

一、介紹/前言：

牛吃草問題，又稱為消長問題，是一條頗有趣味的題目，由牛頓於他的著作《廣義算術》(Arithmetica Universalis)中提出，所以也可以稱為牛頓問題。「牛吃草問題」主要講述草在不斷生長(或枯萎)的情況下，如何計算牛把草吃光所用的時間。看完(二)後，相信大家都會認得這類題目了，因為它就是中國奧數的小六題目，只不過可能以不同情境出現(見(五))。

一條平平無奇的奧數題目，坊間關於探討牛吃草問題的研究也不多，有甚麼值得研究呢？我們覺得，「牛吃草問題」有很多可以擴展的地方，在本文裏，我們會嘗試設計不同的情況。另外，千篇一律的牛吃草太脫離現實了。因此，除了探討一般題目，我們甚至會為題目增加變數，例如牛糞；再觀察變量的變化，然後利用方程，解決不同情況下的「牛吃草問題」，拉近「牛吃草問題」與日常生活的距離。

牛頓是微積分的發明者，有評論認為牛頓的「牛吃草問題」應該是微積分的問題。我們不會用到微積分這麼深奧的數學技巧，因為基本的數學技巧，已經足夠了。

六、總結

(四)的情況 6，相信就是牛頓的牛吃草問題的微積分版本。有人說過，牛頓當時其實是想長草量取決於總草量，然後用微積分解決。其實，由情況 2 開始，已經可以用到微積分，只不過我們對微積分了解不深，於是用另外一些方法，嘗試解釋圖表的現象和進行分析。

不管怎樣，牛吃草問題不僅是一條小六的奧數問題，更是一個大海。如果我們努力把這條題目推廣下去，就像在大海裡潛水，潛得愈深，便能發現愈多和愈珍貴的東西。牛頓說過：「我好像是在海上玩耍，時而發現了一個光滑的石子兒，時而發現一個美麗的貝殼而為之高興的孩子。儘管如此，那真理的大海還神秘地展現在我們面前。」雖然坊間關於牛吃草問題的研究少之又少，但我們像牛頓一樣，在大海中「玩耍」、探究。即使只是一條小六的奧數問題，也能夠推廣到微積分，牛頓就是憑著這個精神，得到很多驚世的發現，令他舉世聞名。

由於時間關係，我們迫不得已地，在這兒止步。但我們透過這個研究，學習了很多知識，尤其是關於微積分的應用。雖然我們沒有在整個研習中使用微積分(僅僅於情況 6 用了極限)，但這個大海，已令我們獲益良多。

七、參考文獻

http://blog.sina.com.cn/s/blog_49c1101d0102y12z.html

<http://www.nwcss.edu.hk/subject/math/pdf/cow.pdf>

http://www.hkame.org.hk/uploaded_files/magazine/22/391.pdf

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/31268239>

華夏盃全國數學奧林匹克試題集 2016，香港數學奧林匹克協會