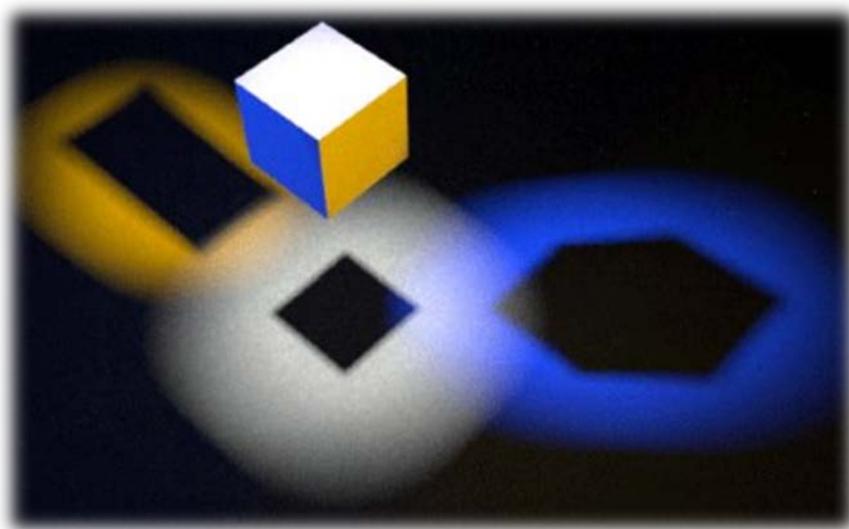


立體投射平面的面積探究



王肇枝中學

- 3A(14) 賴煒盛
- 3A(19) 盧日君
- 3A(28) 蔡駿裕
- 3C(3) 陳耀峯
- 3D(7) 何方正
- 3D(9) 鄺德華

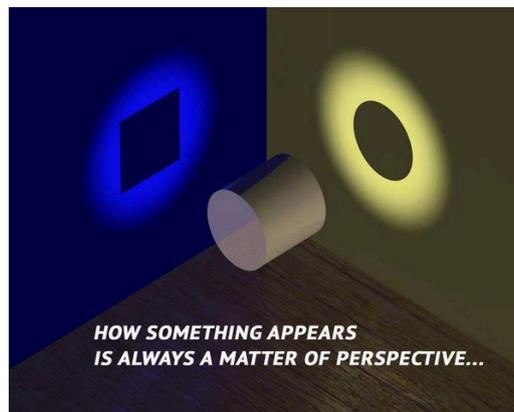
目錄

章節	內容	頁數
一·	引言	3
二·	研究背景及目的	3
三·	研究方法	4
四·	正六面體(立方體)的立體投射平面面積	
	甲· 正多面體只得一平面投射於投射面	7
	乙· 正多面體其中兩平面投射於投射面	8 - 9
	丙· 正多面體其中三平面投射於投射面	10 - 13
	丁· 最大及最小之立體投射平面面積	14
五·	正四面體的立體投射平面面積	
	甲· 正多面體只得一平面投射於投射面	15 - 17
	乙· 正多面體其中兩平面投射於投射面	18 - 19
	丙· 正多面體其中三平面投射於投射面	20
	丁· 最大及最小之立體投射平面面積	21
六·	正八面體的立體投射平面面積	
	甲· 正多面體其中兩平面投射於投射面	22
	乙· 正多面體其中三平面投射於投射面	23 - 24
	丙· 正多面體其中四平面投射於投射面	25 - 27
	丁· 最大及最小之立體投射平面面積	28
七·	總結及進一步探究	29 - 35
八·	感想	36
九·	參考資料	36
十·	附件	37 - 40
十一·	數學專題習作資料	41 - 42

章節一 引言

在初中的課程中，我們曾學習以等角投影紙 (Isometric grid paper) 於紙上繪畫立體圖形，但當以電腦軟件繪畫時，可以更多的角度去觀察立體圖形。從中我們得知，這些立體圖形在平面上看到的面積亦會有所不同。因此，我們希望探究立體投射平面面積的特性，並找出立體圖形投射平面面積最大及最小等的規律。

章節二 研究背景及目的



網上有一張圖片，一個圓柱體在不同的角度觀察下，可以是一個長方形，亦可以是一個圓形。這引發我們再仔細想想，一個立體圖形(除球體外)，在不同的角度投射出來的平面圖形，會有不同的形狀及大小。我們希望藉以數學專題研習的形式，探究幾個正多面體的投射特性。

在探究的開初，我們直接以肉眼看實物，為實物拍下照片，以二維空間感受三維空間的事物。就以以下固體的立方體為例：



圖 1.1 (立方體的平面投射為正方形)



圖 1.2 (立方體的平面投射為長方形)

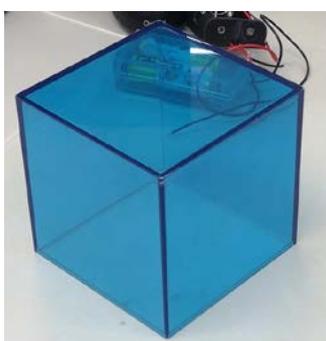


圖 1.3 (立方體的平面投射為六邊形)

立方體的平面投射可以有不同的圖形，但發覺拍下照片即使能夠拿走了與生俱來的立體感，距離感仍然存在，如何比較投射平面圖形的大小？我們就借用了數學軟件 Geogebra 協助相關探究。

而我們的探究目的，是找出哪一個角度看一個正四面體、正六面體及正八面體所投射的平面面積為最小及最大，並找出這幾個正多面體的投射面當中的一些規律。

章節七 總結及進一步探究

對於邊長為 2 的正多面體：

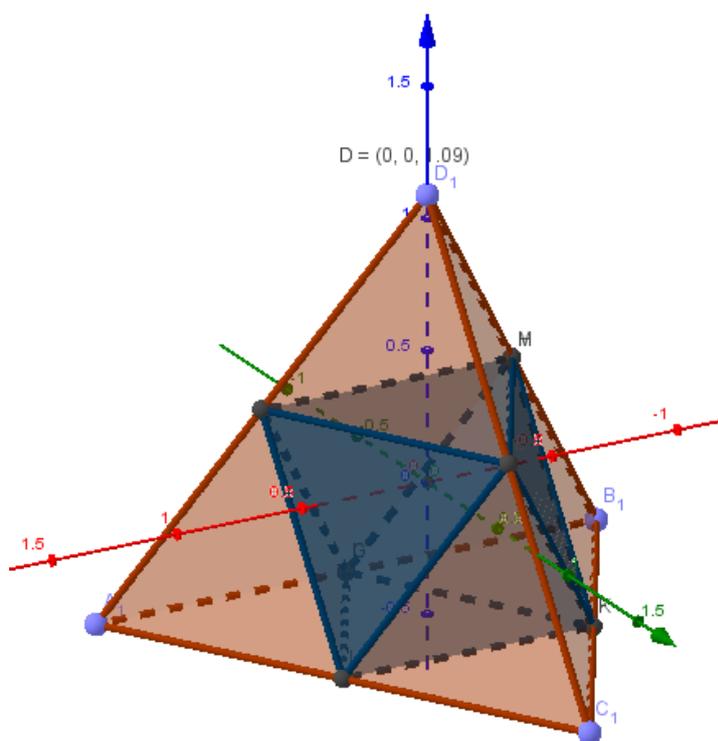
	正四面體	正六面體	正八面體
投射面最大面積	2	$4\sqrt{3}$	4
投射面最小面積	$\sqrt{2}$	4	$2\sqrt{2}$

對於一般情況，即邊長為 l 的正多面體：

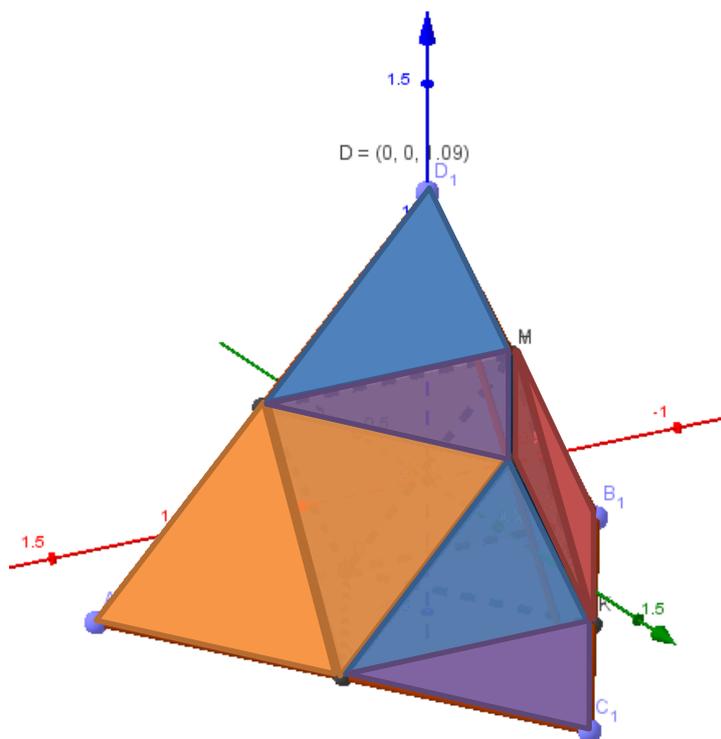
	正四面體	正六面體	正八面體
投射面最大面積	$\frac{1}{2}l^2$	$\sqrt{3}l^2$	l^2
投射面最小面積	$\frac{\sqrt{2}}{4}l^2$	l^2	$\frac{\sqrt{2}}{2}l^2$

正四面體與正八面體關係

由上圖表可觀察到，相同邊長的正多面體，正八面體的投射面最大面積及最小面積均為正四面體的兩倍。我們再仔細觀察此兩個多面體。並將一正八面體內接於正四面體當中，可得



此正四面體的邊長是 2，正八面體的邊長是 1，
 透過下圖可知，正四面體所顯示的投射平面面積是正八面體投射平面面積的兩倍。而其他角度所觀察的正八面體及正四面體亦有如此特性。



設 l_1 為正八面體的邊長，設 l_2 為正四面體的邊長
 設 A_1 為正八面體(邊長為 l_1)的投射平面面積，
 設 A_1' 為正八面體(邊長為 2)的投射平面面積及
 A_2 為正四面體(邊長為 2)的投射平面面積

已知一正多面體， $A = kl^2$ (k 是一常數項)，
 所以 $A_1' = kl_2^2 = k(2l_1)^2 = 4kl_1^2 = 4A_1$

根據上圖

$$\begin{aligned} 2A_1 &= A_2 \\ 2l_1 &= l_2 \end{aligned}$$

故

$$\frac{\text{正八面體(邊長為 2)投射面面積}}{\text{正四面體(邊長為 2)投射面面積}} = \frac{A_1'}{A_2} = \frac{4A_1}{2A_1} = 2$$

與本習作總結部份最大或最小面積結果相同。

章節八 感想

我們在這次研習中，學到了很多東西，例如：如何分工合作、團結一致、有效地搜集有用的資料……等。雖然要在週末時工作，但也很值得。這次專題研習令我明白到大家要團結一致才會成功的。因為有一次我們因與組長的意見不合而吵翻了，結果，我們和組長分開來工作，但我們就甚麼都做不成。事後，我們才發現組長是很重要，但團結更重要。

在這個數學課題上，我們亦得知到更多關於正多面體美麗的數學。除了中一所學的體積及表面面積外，我們亦可透過此專題習作，多思考關乎三維空間與二維空間的關係。

今天的經驗，我們學到的不但是怎樣做專題，更學會怎樣去和人相處，怎樣接納別人的意見。大家在一番討論後，得出一個大家都認同的結果，也花了不少時間。在老師的指導，同學的努力，互相容忍和提點下，我們的精心結作完成了。大家都曾開心過，煩惱過，擔心過，甚至吵過，但最後也順利完成，而大家的友誼也增添不少，回想起又興奮又回味。這次專題研習，我們認為能夠令我從中學到很多知識和與人溝通的方法，雖然有時很辛苦，可是，我們也樂在其中。

章節九 參考資料

1. Mathematics in Action (3rd Edition) 1A and 2B, Pearson (2015)
2. 正四面體、正六面體及正八面體
<https://www.geogebra.org/m/F6Euj53Y>
3. www.geogebra.org