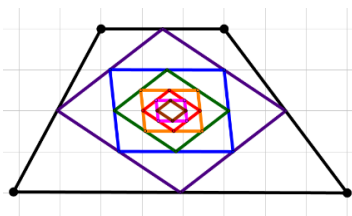


# 探究「伐里農定理」

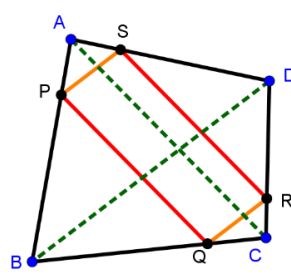
3A 巫巧茹

MO HAU YU



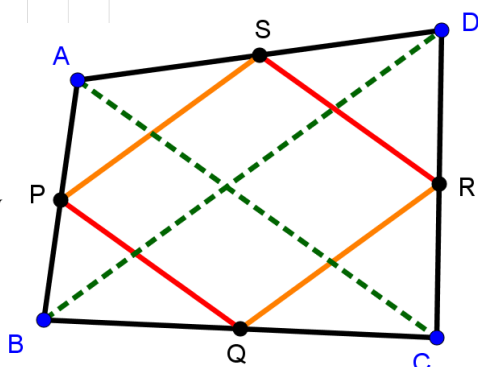
3A 柳文愷

LAU MAN HOI



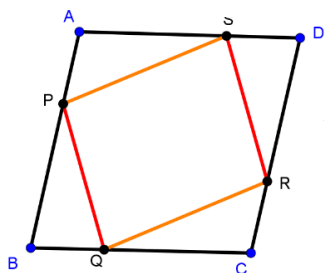
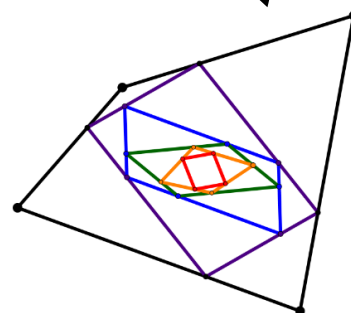
3A 蔡忠希

CHOI CHUNG HEI



3A 岑旻晉

SHOM MAN CHUN

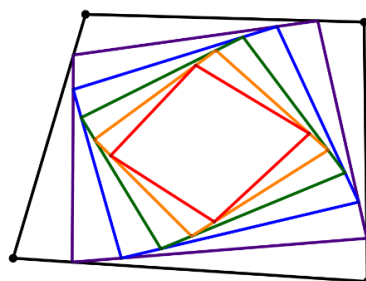


3B 陳念恒

CHAN NIM HANG

3D 宋文軒

SHUNG MAN HIN

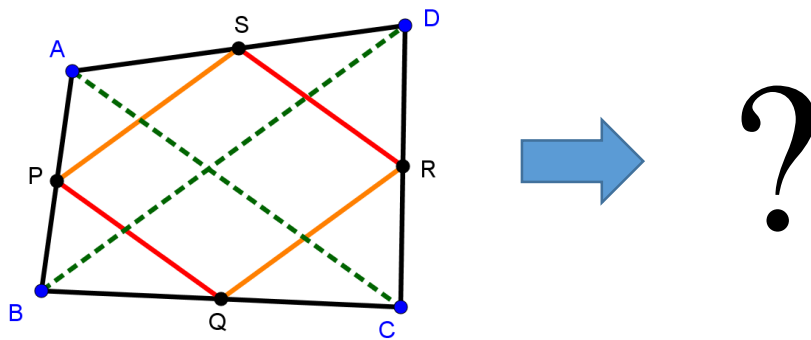


# 專題習作：探究「伐里農定理」

## 目錄

1. 專題簡介	P. 5
2. 皮耶·伐里農 與 伐里農定理	P. 6
3. 探究伐里農定理	
3.1 任意凸四邊形中的伐里農定理	P. 7
3.2 特別四邊形中的伐里農定理	
(a) 菱形	P. 9
(b) 長方形	P. 10
(c) 正方形	P. 11
(d) 鳶形	P. 12
(e) 梯形	P. 13
(i) 等腰梯形	P. 14
(ii) 三等邊梯形	P. 14
(iii) 直角梯形	P. 16
(f) 凹四邊形	P. 17
(g) 交叉四邊形 (cross-quadrilateral)	P. 18
3.3 小總結	P. 19
4. 探究伐里農定理之伸延形式	
4.1 「旋轉 1:n」之伸延形式	P. 23
4.2 「反射 1:n」之伸延形式	P. 31
4.3 小總結	P. 41
5. 伐里農定理之幾何規律	
5.1 伐里農定理之幾何規律	P. 44
5.2 伐里農定理伸延形式：「旋轉 1:n」之幾何規律	P. 49
5.3 伐里農定理伸延形式：「反射 1:n」之幾何規律	P. 57
6. 總結	P. 62
7. 感想	P. 68
8. 參考資料	P. 69

## 1. 專題簡介



在中三數學課堂學習四邊形的性質時，我們遇到一條看似是平平無奇的例題：「若  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  及  $S$  分別為四邊形  $ABCD$  每邊之中點，則  $PQRS$  是平行四邊形」。不過老師介紹這原來是數學上不太著名卻十分有趣的「伐里農定理」，結果我們就老師之引導下，逐步探究課本上沒有記載之伐里農定理及它的伸延形式，及拆解由上述定理作構作的幾何規律。

## 2. 皮耶·伐里農 與 伐里農定理

皮耶·伐里農 (Pierre Varignon, 1654 年—1722 年 12 月 23 日), 耶穌會神父, 法國數學家。生於卡昂, 卒於巴黎。他的貢獻主要在靜力學。他是首個說明力距的概念和計算的人。

伐里農初時在耶穌會學院接受神學和哲學方面的教育, 在那裡他接受了神職人員的培訓。1676 年, 他被接納為祭司職務, 並成為一名牧師。雖然他已經進入祭司職業生涯, 但當他偶然遇到歐幾里得的著作《幾何原本》並開始閱讀時, 他的生活發生了改變。通過閱讀《幾何原本》, 他對學習數學產生強烈的興趣。他繼續閱讀笛卡爾的作品《幾何學》(La Géométrie), 然後致力於數學科學。1686 年, 伐里農和他的朋友一起去了巴黎, 並拜訪那裡的數學家和科學家。

1687 年, 伐里農發表了他的著作 (Projet d'une nouvelle mécanique), 他在力學的研究中使用萊布尼茨的微分學。在 1688 年, 他成為數學教授, 並從事更多數學上的研究。1699 年, 他應用微分來計算液體流動的問題。1702 年運用微積分計算以彈簧控制的時鐘。伐里農在 1707 年至 1711 年期間主要進行有關力學的研究, 並在 1724 年給出了幾何靜力學的一些重要發現。

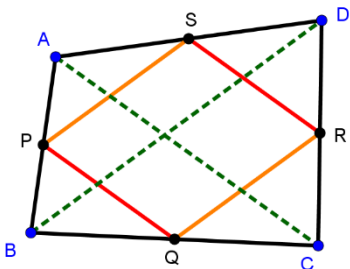
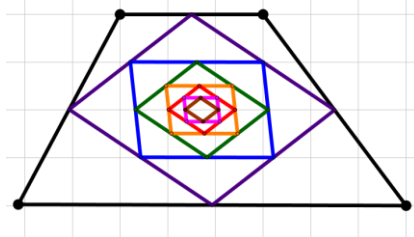
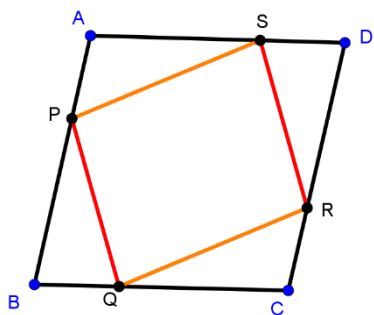
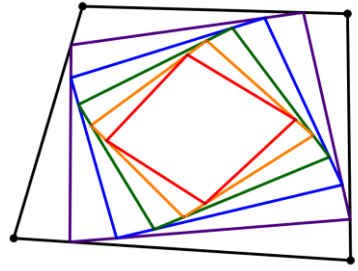
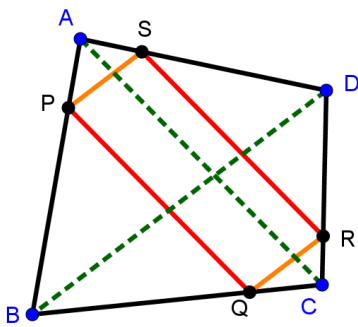
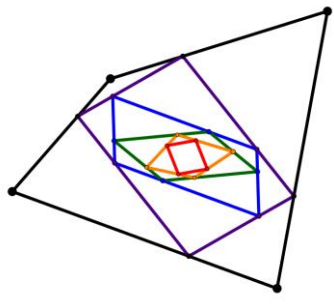
伐里農去世後 9 年, 他的數學筆記被正式出版成書 (éléments de mathématiques), 其中包括一個幾何定理:

「若 P、Q、R 及 S 分別為四邊形 ABCD 每邊之中點, 則 PQRS 是平行四邊形」。

伐里農是第一個就上述定理給出嚴格證明的人, 故上述定理便被後世稱為「伐里農定理」(或稱為伐里農平行四邊形定理 Varignon's Parallelogram Theorem)。

## 6. 總結

在這個專題研習中，我們研究了伐里農定理、它的伸延形式及其構成之幾何規律：

<p style="text-align: center;">伐里農定理</p> 	<p style="text-align: center;">伐里農定理之幾何規律</p> 
<p style="text-align: center;">伐里農定理伸延形式： 「旋轉 1:n」</p> 	<p style="text-align: center;">伐里農定理伸延形式： 「旋轉 1:n」之幾何規律</p> 
<p style="text-align: center;">伐里農定理伸延形式： 「反射 1:n」</p> 	<p style="text-align: center;">伐里農定理伸延形式： 「反射 1:n」之幾何規律</p> 

## 7. 感想

這次的專題研習大大增強了我們對學習數學的熱誠。在研習過程中，我們對伐里農定理一無所知，繼而慢慢研究它的由來，並且應用我們在數學課堂中所學的四邊形性質（尤其是不同四邊形的對角線特性）及不同四邊形之間的關係（包含關係與非包含關係），從而作出一個又一個的證明。現在我們除了對伐里農定理有更深層的認識外，亦看懂了更多數學知識，例如邏輯關係、反證法、餘弦定理等，以及領略到幾何規律的奧妙。

相信這次的經驗對我們之後的學習十分之有幫助，令我更有信心日後於探索數學旅程中「從零去了解一個數學課題」和「一層層地深入探究數學課題」。當然不能忽略的還有於專題研習中與人合作及溝通的重要性。

## 8. 參考資料

- Wiki : Varignon's theorem  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Varignon%27s\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Varignon%27s_theorem)
- Biographies : Pierre Varignon  
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Varignon.html>
- Oliver, P. N. (2001). “Pierre Varignon and the Parallelogram Theorem.”  
Mathematics Teacher 94(4) : 316 – 319.  
[https://www.maa.org/sites/default/files/images/upload\\_library/46/NCTM/mt2001-Varignon1.pdf](https://www.maa.org/sites/default/files/images/upload_library/46/NCTM/mt2001-Varignon1.pdf)
- Oliver, P. N. (2001). “Consequences of the Varignon Parallelogram Theorem.”  
Mathematics Teacher 94(5) : 406 – 408.  
[https://www.maa.org/sites/default/files/images/upload\\_library/46/NCTM/mt2001-Varignon2.pdf](https://www.maa.org/sites/default/files/images/upload_library/46/NCTM/mt2001-Varignon2.pdf)
- José N. Contreras (2014). “Investigating Variations of Varignon’s Theorem Using GeoGebra.”  
GeoGebra International Journal of Romania 3(2) : 29 – 36.  
<https://ggijro2.files.wordpress.com/2014/04/art531.pdf>