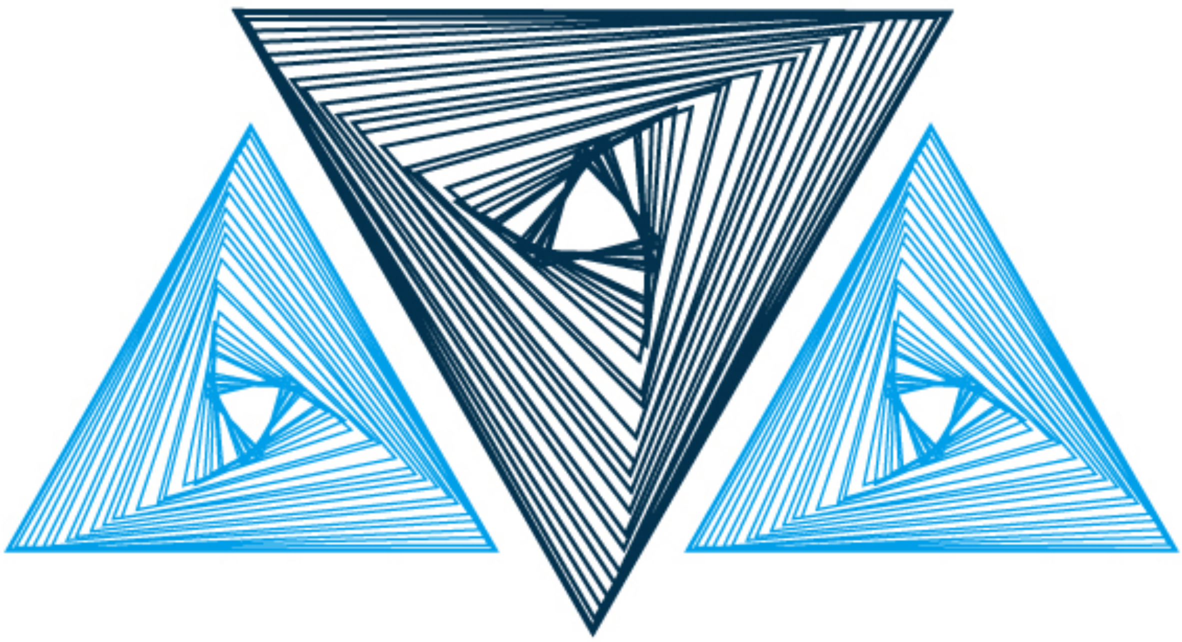
Extract

Investigate the Similarity of a Given Triangle and its Inscribed Triangle

三角形及其內接三角形的相似性探究



前言

由中點定理可知，若以三角形三邊的中點為頂點構造三角形，則能得到與原三角形滿足長度比為 1:2 的相似三角形。參考圓內接多邊形的定義，類似地，我們從三角形三邊中分別選取一個點（非三角形頂點），由此所構成的三角形定義為三角形內接三角形。除了由三個中點所構成的三角形以外，還會有其他內接三角形與原三角形相似嗎？需要滿足什麼條件才能實現相似呢？本文將內接三角形與原三角形的相似分成了「反向相似」及「反射相似」兩類並展開探討。

1. 關於反向相似

定義：若內接三角形與原三角形相似且對應點不共線，則這兩個三角形反向相似。

我們根據內接三角形的頂點所包含的原三角形的中點數量進行分類：

1.1 內接三角形的頂點中僅有兩個點為原三角形的中點

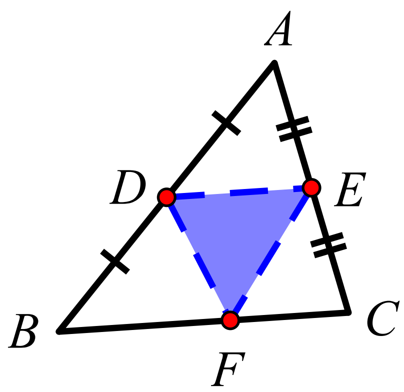


圖 1

如圖 1 所示，假設 D、E 分為 AB、AC 的中點，而 F 並非 BC 的中點，使得 $\triangle ABC \sim \triangle FED$。

證明：$\because \triangle ABC \sim \triangle FED$

$\therefore \angle ACB = \angle FDE$

$\because AD = DB$ 及 $AE = EC$

$\therefore DE \parallel BC$

$\therefore \angle AED = \angle ACB$

$\therefore \angle AED = \angle FDE$

$\therefore DF \parallel AC$

$\because AD = DB$ 及 $DF \parallel AC$

$\therefore BF = FC$

$\therefore\ \angle NAO = \angle NMO$

$\because\ \angle PNM = \angle ABC$

$\because\ \angle PNM + \angle NMO = 90°$

$\therefore\ \angle ABC + \angle NAO = \angle ATC = 90°$

$\therefore\ \triangle ABC$ 中參考線上的高線經過 $\triangle PNM$ 的垂心。

為了實現「等價關係」，我們同樣需要添加上一組對應角相等的條件 (“$\angle PNM = \angle ABC$” 或 “$\angle NPM = \angle BAC$”或“$\angle PMN = \angle ACB$”)。

對於原三角形及內接三角形均為鈍角三角形，若鈍角所在點為參考點，則：

內接三角形與原三角形反射相似。

$$\Updownarrow$$

原三角形參考線上的高線經過內接三角形垂心且一組對應角相等。

3. 綜合結論

3.1 反向相似的判定

- 對於直角三角形，若內接三角形的直角所在點為原三角形的斜邊中點，則內接三角形與原三角形反向相似。
- 對於銳角三角形或鈍角三角形，若內接三角形的一條高線經過原三角形的外心且垂足位於原三角形某兩個中點所在直線上，則內接三角形與原三角形反向相似。

3.2 反射相似的判定

- 對於直角三角形且直角所在點非參考點，若原三角形的參考點沿內接三角形的參考線的中點作反射，其像位於原三角形的參考線上，則內接三角形與原三角形反射相似。

- 對於直角三角形且直角所在點為參考點，若原三角形斜邊上的高線的垂足與內接三角形的直角頂點重合，則內接三角形與原三角形反射相似。
- 對於銳角三角形，若原三角形參考線上的高線經過內接三角形的垂心，並有一組對應角相等，則內接三角形與原三角形反射相似。
- 對於鈍角三角形且鈍角所在點為參考點，若原三角形參考線上的高線經過內接三角形的垂心，並有一組對應角相等，則內接三角形與原三角形反射相似。

3.3 反向相似下的共點性質

對於銳角三角形或直角三角形，若內接三角形與原三角形反向相似，則原三角形的外心與內接三角形的垂心共點。

4. 後續探究方向

若鈍角三角形與它的內接三角形反向相似，能否得出內接三角形的一條高線經過原三角形的外心且垂足位於原三角形某兩個中點所在直線上？對於鈍角三角形，若內接三角形與原三角形反向相似，原三角形的外心和內接三角形的垂心共點？針對這兩個猜想，我們初步認為答案是肯定的，這也是我們後續完善此報告的探究方向。

5. 參考文獻

[1] Holshouser, A. and Reiter, H., 2014. *Classifying Similar Triangles Inscribed In A Given Triangle*. [online] Webpages.uncc.edu. Available at: <https://webpages.uncc.edu/~hbreiter/Classifying%20Triangles.pdf> [Accessed 14 June 2020].

[2] 賀功保, &數學特級教師. (2015). *三角形的六心及其應用.* 哈爾濱工業大學出版社.