

研究題目：

自我反省 2020

撮要：(200 字)

2020 除了是一個令人難忘的年份外，更是一個奇妙的數字：它剛好由 2 個「0」、0 個「1」、2 個「2」及 0 個「3」所組成。在本報告中，這種數字稱為「自我反省數」。我們首先利用推理的方法找出 10 位數以內的「自我反省數」；但由於未肯定答案的存在及唯一性，於是利用了「整數分拆」這個概念進行數學建模，並建立「反省函數」進行迭代，成功找出所有 10 位數以內的「自我反省數」。在過程中，也意外地發現了一些有趣的性質。

章節	標題	頁數
首頁	研究題目：自我反省 2020	p. 1
第一章	問題緣起	p. 2
第二章	定義	p. 3
第三章	簡單推理	p. 4
第四章	網上資料	p. 7
第五章	數學建模	p. 8
第六章	有趣的發現 – 互相反省數組	p. 16
第七章	總結	p. 21
第八章	感想及展望	p. 22
附錄 1	數學家 Tanya Khovanova 的證明	p. 23
附錄 2	$n = 7, 8, 9, 10$ 的迭代	p. 24
參考書目及網頁		p. 36

第七章：總結

下表總結了 10 位數以內所有「自我反省數」以及「互相反省數組」。

n 位	自我反省數	互相反省數組
4 位	1 210, 2 020	不存在
5 位	21 200	不存在
6 位	不存在	(230 100, 311 100)
7 位	3 211 000	(3 300 100, 4 102 000, 4 110 100)
8 位	42 101 000	(43 000 100, 51 011 000)
9 位	521 001 000	(530 000 100, 610 101 000)
10 位	6 210 001 000	(7 101 001 000, 6 300 000 100)

原來在芸芸 10 位數以內，只有 7 個數有「自我反省」的性質。所以稱 2 020 為千年一遇、甚至是萬年一遇的，也絕不為過。

兩組數循環的互相反省數，只有 4 組。能夠有「我替你反省，你又替我反省」這種情操，更是難能可貴，可以稱為「知己數」：所謂「山河不足重，重在遇知己」。

三組數循環的互相反省數，我中有你，你中有他，他中又有我，原來更是稀有，10 位數以內只有一組。難怪李太白也在《月下獨酌》嘆道：「舉杯邀明月，對影成三人」了。

第八章：感想和展望

這是一場奇妙的數學之旅。

從一道最多 5 分鐘便可以解決的 IQ 題，進而變成深入探究了「自我反省數」；再由找尋「自我反省數」時，卻意外發現了「互相反省數」。數學之妙，令人嘖嘖稱奇。

2 020 是一個的不平凡的數字：它是千年難遇的自我反省數；一場毫無預兆的新冠病毒也在 2 020 年於全球蔓延開來。

「吾日三省吾身。」持續不斷的反省才能使人進步。

正如這份專題研習一樣，可能要懂得夠自省，不驕傲不自滿，遇上難題時，也能夠保持謙卑自省的心，才是 2 020 的出路。

我們期望將來學會利用電腦程式去使迭代更有效率。如果有更充裕的時間，也可以探究形如 (130, 1 101) 或 (230, 10 110) 這類不同數位的互相反省數組。

參考資料：

1. Alex Bellos (2016). *Can You Solve My Problems?* London: Guardian Books.
2. 維基百科
https://en.wikipedia.org/wiki/Self-descriptive_number
3. Tanya Khovanova's Math Blog
<https://blog.tanyakhovanova.com/2007/12/autobiographical-numbers/>
4. TEDEd
<https://www.youtube.com/watch?v=IRfdMiURV4s>